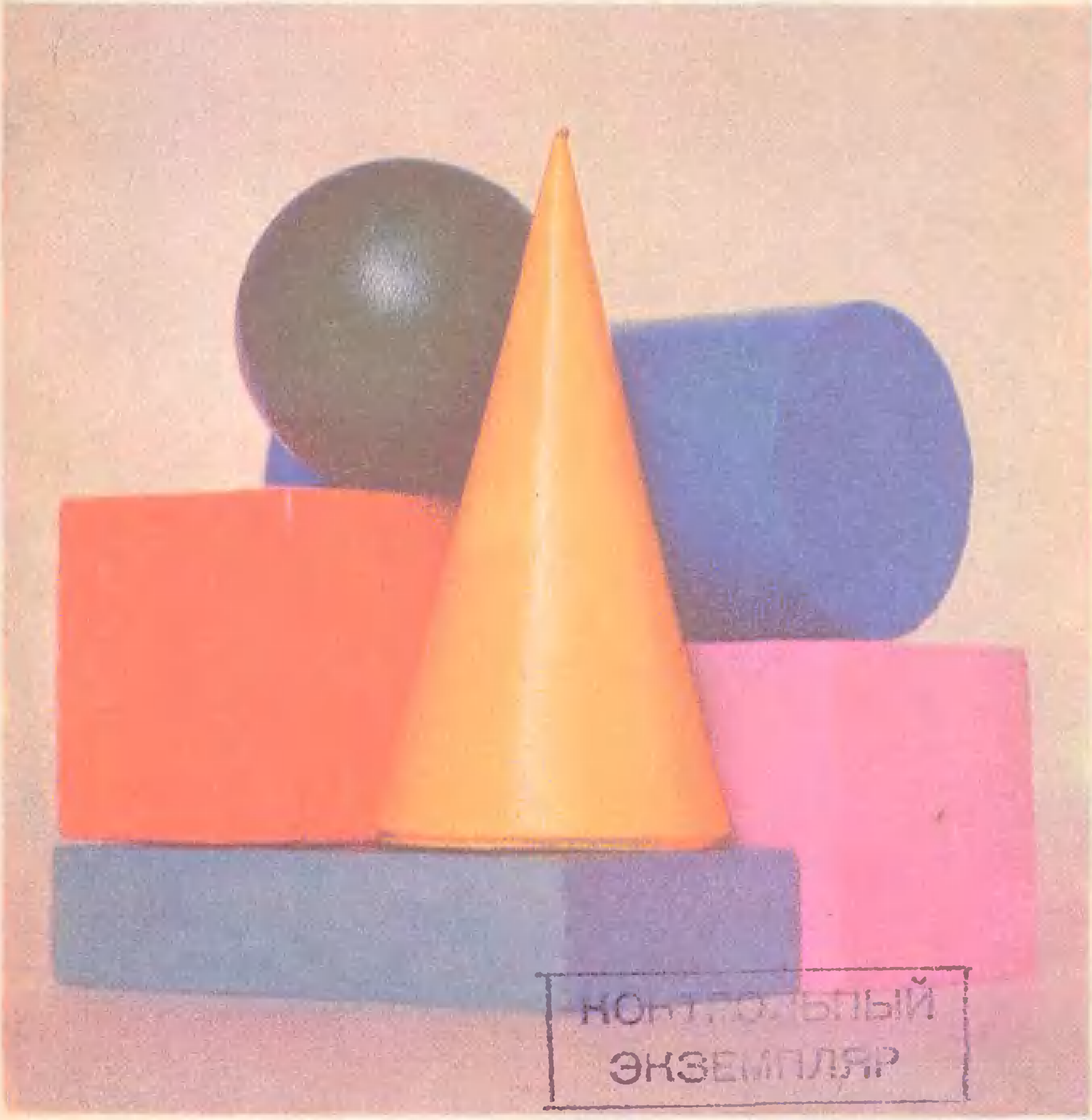
Научно-популярный физико-математический

Квант

8

1970

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



Заведующая редакцией *Л. В. Чернова.*
Главный художник *Е. П. Леонов.*
Технический редактор *Т. М. Макарова.*
Корректоры *Г. С. Смоликова* и *И. Б. Мамулова*
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11
Сдано в набор 19/V-70 г.

Подп. к печ. 10/VIII-70 г.
Бумага $70 \times 100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 5,5 Тир. 172480 экз.
Т-09858
Цена 30 коп. Заказ 848
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Чехов Московской области

Научно-популярный физико-математический

Квант

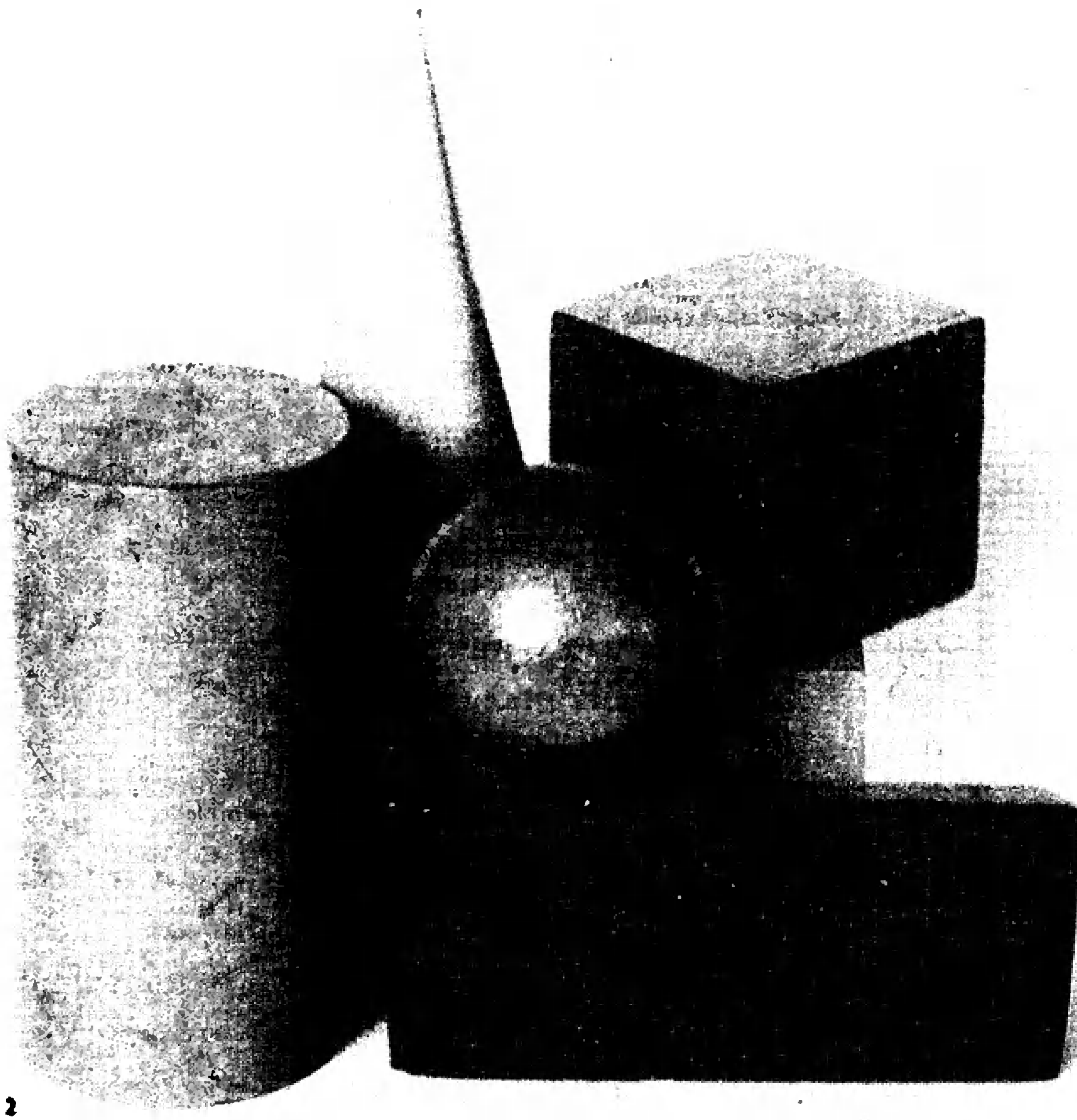
журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

8

В НОМЕРЕ:

НЕВПИСЫВАЕМЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Е. М. Андреев



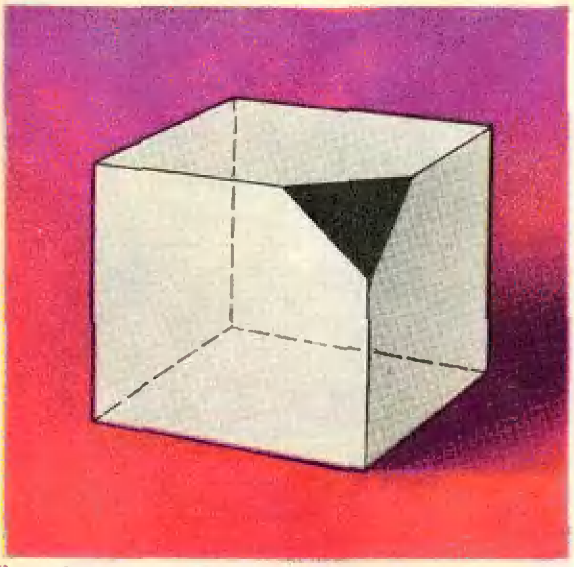


Рис. 1.

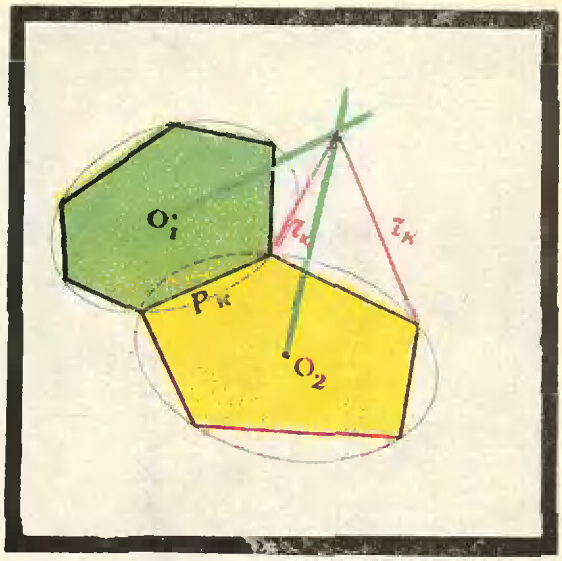


Рис. 2.

Рассмотрим куб, одна из вершин которого срезана плоскостью (рис. 1). Можно ли полученный многогранник вписать в сферу? Зависит ли ответ на этот вопрос от того, какой именно плоскостью срезана вершина? С решением этой, а также подобных задач мы и хотим познакомить читателя.

Предположим, что нам дан выпуклый ограниченный многогранник, т. е. тело в пространстве, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками — гранями — и лежащее по одну сторону от плоскости каждой из своих граней. Требуется выяснить, можно ли данный многогранник вписать в сферу.

Обозначим весь многогранник буквой M, занумеруем по отдельности его грани, ребра и вершины и будем обозначать i-ю грань через Γ_i, i-е ребро через P_i и i-ю вершину через B_i. Принято говорить, что две грани смежные, если у них имеется общее ребро, а две вершины соседние, если они суть концы одного и того же ребра.

Чтобы решить поставленную задачу, надо прежде всего проверить, являются ли все многоугольники Γ_i вписанными. Затем для каждого ребра P_k рассмотрим пару граней Γ_i и Γ_j, граничащих по этому ребру, и обозначим через r_k расстояние от точки пересечения перпендикуляров, восставленных из центров окружностей, описанных около Γ_i и Γ_j, до одной из вершин многоугольника Γ_i или Γ_j; величина r_k, очевидно, не зависит от выбора вершины (рис. 2).

З а д а ч а 1. *Доказать, что многогранник M вписанный тогда и только тогда, когда все многоугольники Γ_i вписанные, и $r_1=r_2=\ldots=r_m$, где m — число ребер многогранника.*

Этот или аналогичный способ проверки вписанности M был известен очень давно, но вдруг в начале XX века обнаружилось, что в целом ряде случаев можно доказать, что M вписанным не является, не производя почти никаких вычислений.

Первым это заметил немецкий математик Э. Штейниц. В 1927 году вышла в свет его статья, в которой была доказана следующая теорема.

Т е о р е м а Ш т е й н и ц а. *Пусть все вершины многогранника M можно разбить на черные и белые так, чтобы*

I. *Никакие две черные вершины не были соседними.*

II. *Число черных вершин было больше, чем число белых.*

Тогда многогранник M нельзя вписать в сферу.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сделаем некоторые замечания. Пусть у нас есть фиксиро-

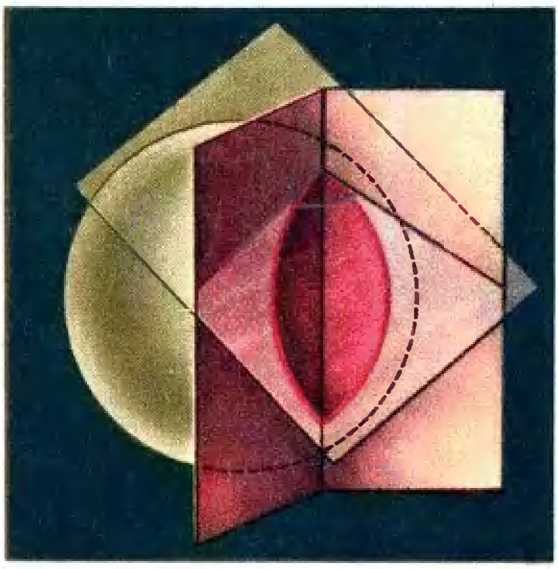


Рис. 3.

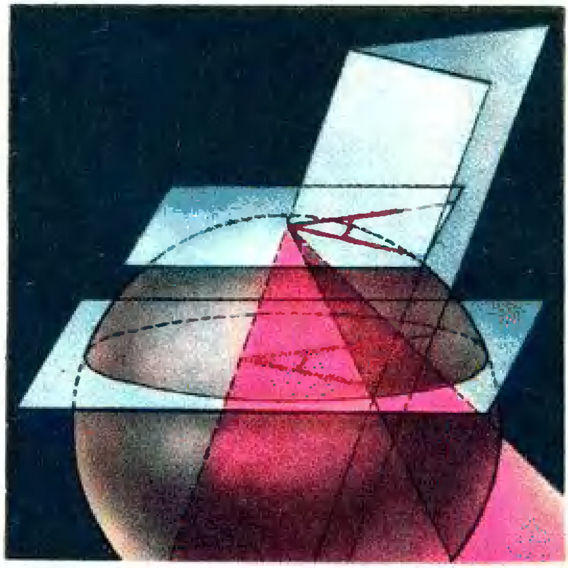


Рис. 4.

ванная сфера и некоторый двугранный угол, ребро которого эту сферу пересекает. Возьмем точку пересечения ребра со сферой и проведем через нее касательную плоскость (рис. 3). Двугранный угол высекает в этой плоскости линейный угол. Этот угол мы назовем линейным углом двугранного угла относительно данной сферы или просто **относительным углом двугранного угла**. Очевидно, что относительный угол не зависит от выбора одной из двух точек пересечения ребра со сферой. Если же ребро касается сферы, то удобно положить величину относительного угла равной нулю.

Рассмотрим теперь выпуклый многогранный угол, все ребра которого пересекают данную сферу. Относительные углы его двугранных углов назовем *относительными углами данного многогранного угла*. Пусть у многогранного угла n граней, а его вершина лежит на сфере. Тогда сумма его относительных углов равна $\pi(n-2)$. В самом деле, проведем через вершину многогранного угла касательную плоскость, а затем проведем плоскость, ей параллельную, секущую и сферу, и все ребра многогранного угла (это возможно, так как все ребра угла пересекают сферу). Многогранный угол высекает в этой последней плоскости многоугольник, углы которого равны относительным углам, что следует из теоремы об углах с попарно параллельными сторонами (рис. 4). Аналогичное равенство для суммы углов многоугольника хорошо известно.

Перейдем к доказательству самой теоремы. Предположим, что многогранник M вписан в сферу. Обозначим относительный угол двугранного угла с ребром P_i через γ_i. Пусть n_k — число ребер, сходящихся в вершине B_k.

Из доказанного выше следует, что сумма относительных углов при вершине B_k равна $\pi(n_k-2)$. Положим $\beta_i=\pi-\gamma_i$, угол β_i — **внешний относительный угол**, тогда $\gamma_i=\pi-\beta_i$. Если сумма внутренних относительных углов равна $\pi(n_k-2)$, то сумма внешних относительных углов равна 2π. Итак, если в вершине B_k сходятся ребра $P_i, P_j, \ldots, P_l$, то

$$\beta_i+\beta_j+\ldots+\beta_l=2\pi.$$

Выпишем аналогичные равенства для каждой вершины многогранника, потом умножим равенства, соответствующие черным вершинам, на -1 и сложим их все. Черных вершин больше, следовательно, в правой части будет стоять отрицательное число. Рассмотрим сумму, стоящую в левой части. Если i-е ребро идет из черной вершины в белую, то число β_i входит

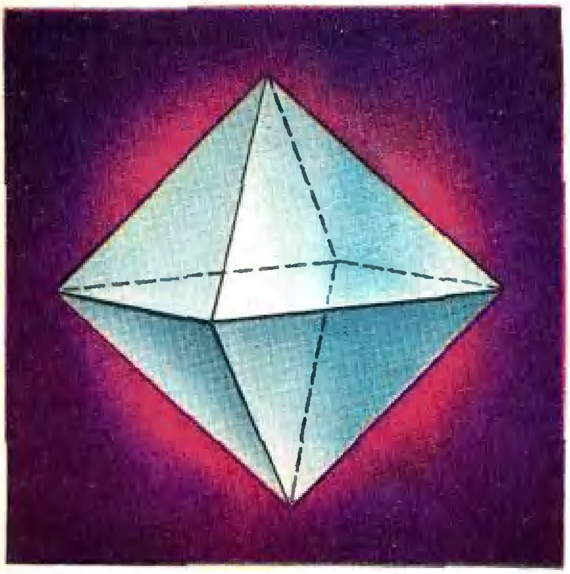


Рис. 5, *а*. Октаэдр.

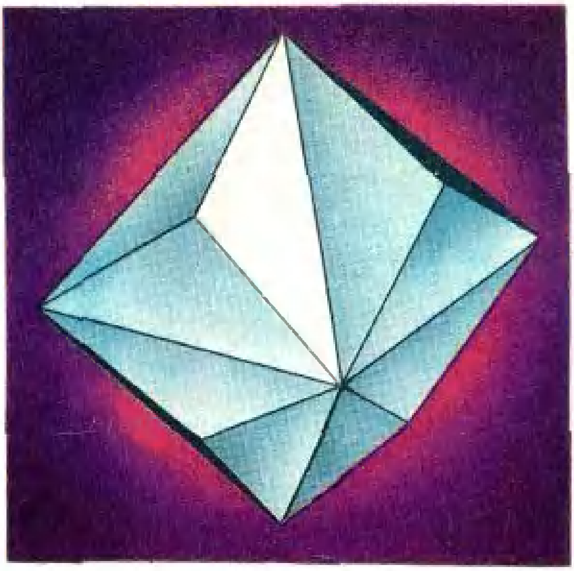


Рис. 5, *б*. Этот многогранник выпуклый.

в левую часть один раз со знаком «+» и один раз со знаком «−», в сумме 0; если — из белой в белую, то β_i оба раза входит с «+». Ребер с двумя черными концами не бывает. Итак, сумма чисел в правой части не меньше нуля и мы пришли к противоречию, предположив, что M — вписанный.

Прежде чем переходить к анализу полученного результата, т. е. прежде чем выяснять, чем замечательна и что означает теорема Штейница, надо показать, что теорема содержательна, т. е. что существуют многогранники, удовлетворяющие ее условиям. Возьмем октаэдр (рис. 5, *а*) и на каждой его грани, как на основании, построим правильную треугольную пирамиду, причем высоту пирамиды возьмем такой маленькой, чтобы двугранные углы при основании были меньше 25°. Рассмотрим многогранник M, склеенный из исходного октаэдра и восьми вновь построенных пирамид (рис. 5, *б*).

З а д а ч а 2. *Доказать, что многогранник M выпуклый.*

Объявим белыми те его вершины, которые были вершинами исходного октаэдра, а черными — все остальные. Ясно, что условия теоремы Штейница выполняются. Итак, мы построили пример многогранника, который нельзя вписать в сферу, в чем можно убедиться, не зная ни размеров, ни углов многогранника, но зная только его с т р о е н и е.

Уточним, что значит строение. Начнем с плоскости. Чтобы описать строение выпуклого многоугольника, надо сказать, сколько у него вершин, тогда у него столько же и сторон; каждая сторона смежна с двумя другими, и в каждой вершине сходятся две стороны.

Иное дело в пространстве: у додекаэдра (рис. 6, *а*) и у десятиугольной призмы (рис. 6, *б*) одинаковое число граней —12, одинаковое число ребер — 30, одинаковое число вершин — 20, а строение совсем разное. В пространстве, чтобы описать строение многогранника, надо сказать не только сколько у него ребер, граней и вершин, но и как грани склеены между собой, т. е. какие грани являются смежными, какие вершины являются соседними и какие грани сходятся в каждой из вершин. Два многогранника имеют одинаковое строение, если у них одинаковое число вершин, ребер и граней и они одинаково из этих элементов составлены.

Назовем выпуклый многогранник M такой, что ни сам он, ни любой другой многогранник, имеющий то же строение, вписанным не является, абсолютно невписываемым. Из тео-

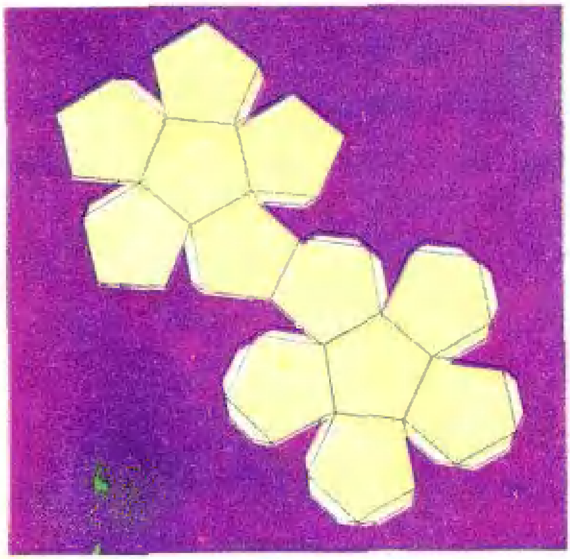


Рис. 6. *а*. Развертка додекаэдра.

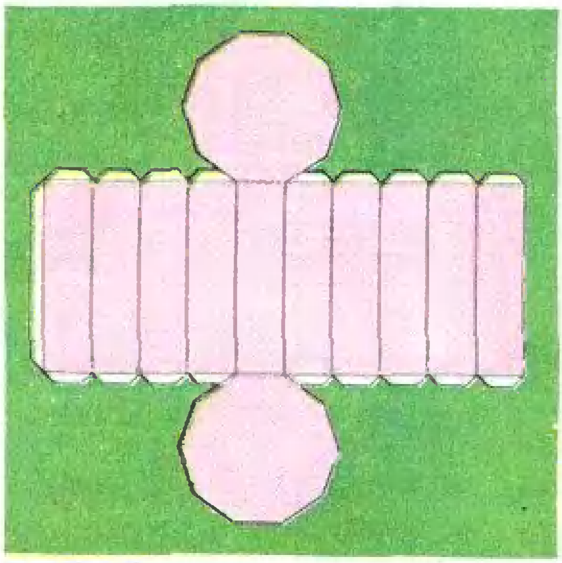


Рис. 6. *б*. Развертка десятиугольной призмы.

ремы Штейница следует, что любой многогранник, удовлетворяющий ее условиям I и II, является не только невписываемым, но и абсолютно невписываемым. Построенный выше многогранник (рис. 5, *б*) представляет собой пример абсолютно невписываемого многогранника. Ничего подобного на плоскости не бывает: для всякого $n \geq 3$ найдется вписанный n-угольник. Поэтому до Штейница все считали, что не существует абсолютно невписываемых многогранников. Существовали даже очень правдоподобные, но чуть-чуть не законченные доказательства этого утверждения. Теперь появилась новая проблема: найти все абсолютно невписываемые многогранники, точнее, найти необходимые и достаточные условия того, чтобы многогранник был абсолютно невписываемым.

У нас есть условие Штейница — достаточное условие абсолютной невписываемости. Может быть оно является необходимым? Нет. Это вытекает из следующих задач.

Задача 3. *Пусть все вершины многогранника М можно разбить на черные и белые так, чтобы*

I. *Число белых было не больше числа черных.*

II. *Никакие две черные вершины не были бы соседними и, напротив, нашлись бы две соседние белые вершины.*

Доказать, что многогранник М нельзя вписать в сферу.

Задача 4. *Построить пример многогранника, удовлетворяющего условию задачи 3 и не удовлетворяющего условиям теоремы Штейница.*

Важно отметить и другое: если в каждой вершине многогранника M сходится одно и то же число, скажем, k граней, то M не удовлетворяет ни условию теоремы Штейница, ни условию задачи 3. Предположим противное, и пусть m — число всех ребер многогранника, p — число его черных вершин и q — белых, $p \geq q$, а в теореме Штейница это неравенство строгое. Тогда $2m = k(p+q)$, у каждого ребра два конца, в каждой вершине сходятся k ребер. Кроме того, на каждом ребре лежит белая вершина, т. е. $m \leq kq$, и в случае задачи 3 это неравенство строгое. С другой стороны, $p+q \geq 2q$, и в условиях теоремы Штейница это неравенство строгое. Итак, получаем неравенства

$$kq \leq m \leq kq.$$

Если M удовлетворяет условию теоремы Штейница или условию задачи 3, то одно из этих неравенств будет строгим, что невозможно.

Остановимся теперь на многогранниках, в каждой вершине которых сходятся три грани: эти многогранники в некотором смысле самые ти-

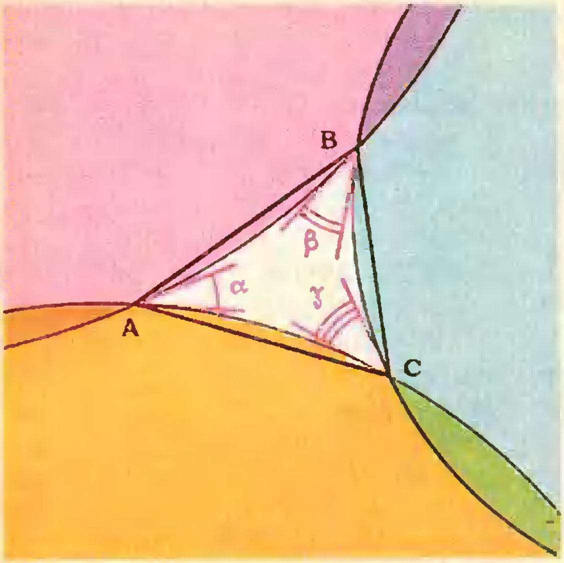


Рис. 7, *а*. Вершина угла лежит вне сферы, $\alpha+\beta+\gamma<\pi$

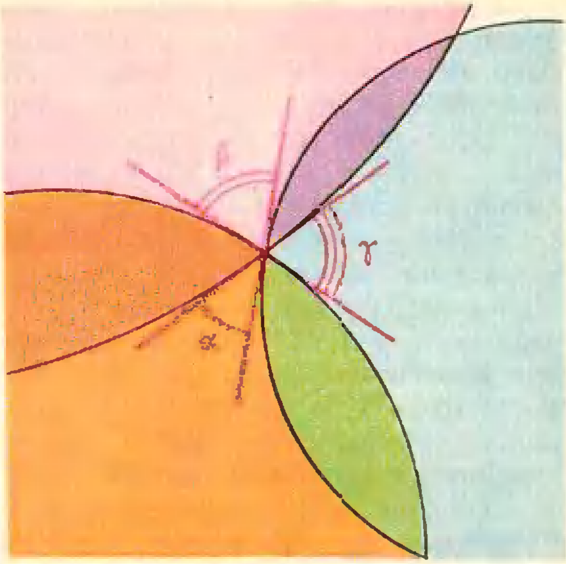


Рис. 7, *б*. Вершина угла лежит на сфере, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

ничные, но мы о них ничего не знаем с точки зрения их вписываемости.

Рассмотрим три попарно пересекающиеся плоскости: они либо образуют трехгранный угол, либо линии их пересечения параллельны; в этом случае скажем, что они образуют бесконечный трехгранный угол. Фиксируем некоторую сферу. Пусть все ребра трехгранного угла ее пересекают, а вершина этой сфере не принадлежит, а может быть, вершины и вовсе нет. Оказывается, что если вершина угла лежит внутри шара, но не на сфере, то сумма относительных углов больше π, а если лежит вне шара или угол бесконечный, то меньше π. Действительно, рассмотрим окружности, высекаемые гранями трехгранного угла на сфере, — углы между этими окружностями и есть относительные углы трехгранного угла. Возьмем точку на сфере, не принадлежащую ни одной из этих окружностей, и стереографически спроектируем окружности из этой точки на плоскость. Возможны три случая (рис. 7, *а*, *б*, *в*): в первом — вершина лежит вне сферы, во втором — на сфере, в третьем — внутри сферы. Углы сохраняются при стереографической проекции, значит, углы α, β, γ равны исходным относительным углам. В первом случае $\alpha+\beta+\gamma$ меньше суммы углов ΔABC, а в третьем — больше. Утверждение доказано.

Пусть все вершины многогранника M можно разделить на черные и белые так, чтобы две вершины одного цвета не были соседними.

З а д а ч а 5. *Пусть во всех вершинах многогранника M сходится одинаковое число граней и все вершины разбиты на черные и белые так, чтобы никакие две вершины одного цвета соседними не оказались. Доказать, что число черных вершин равно числу белых.*

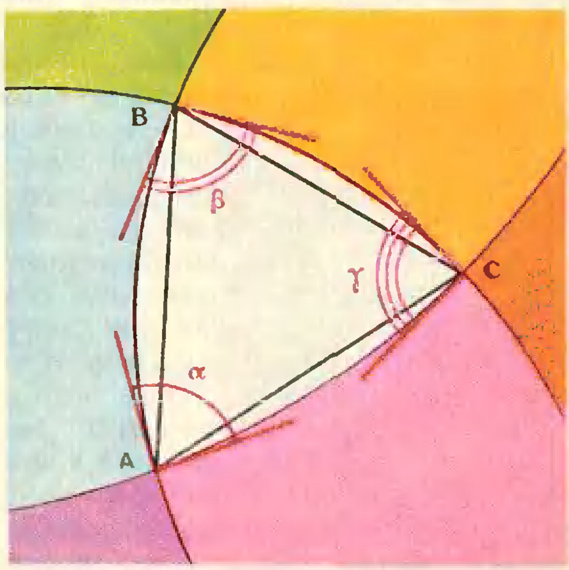


Рис. 7, *в*. Вершина угла лежит внутри сферы, $\alpha+\beta+\gamma>\pi$

З а д а ч а 6. *Доказать, что вершины многогранника можно разбить на черные и белые так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соседними тогда и только тогда, когда у каждой грани многогранника четное число сторон.*

У к а з а н и е. Для доказательства достаточно взять любую вершину и объявить ее белой, соседние с ней — черными и т. д. Нужно доказать, что при этом не возникает противоречий, т. е. что во всякой замкнутой ломаной, составленной из ребер многогранника, четное число звеньев.

Вернемся к многограннику M с раскрашенными вершинами. Так как у M в каждой вершине сходятся три грани, то число белых вершин равно числу черных вершин. Выделим у него некоторые из черных вершин (одну, две или все) и отрежем их с помощью плоскостей. Каждую вершину отрежем одной плоскостью, пересекающей лишь те ребра, которые из этой вершины исходят, и не содержащей никаких вершин M. Получившийся многогранник обозначим M'. Он отличается от M тем, что у него вместо некоторых черных вершин — треугольные грани. Докажем, что многогранник M' абсолютно невписываемый.

Предположим, что многогранник M' или другой многогранник, имеющий то же строение, вписан в сферу. Выделим три грани, которые соответствуют трем граням многогранника M, сходящимся в одной обрезанной вершине. Эти три грани попарно смежные, вершина обрезанного трехгранного угла лежит заведомо вне сферы, так как многогранник вписанный, поэтому сумма относительных углов при них меньше π. Припишем каждому ребру многогранника M относительный угол при соответствующем ребре многогранника M'. Тогда сумма этих приписанных углов при всех белых и при всех не выделенных черных вершинах равна π, а при выделенных черных вершинах строго меньше π. Как и при доказательстве теоремы Штейница, выпишем эти равенства и неравенства, суммы, соответствующие белым вершинам, умножим на —1 и сложим их. В результате должно получиться строгое неравенство. Однако в левой части мы получим нуль, ибо каждый из приписанных углов один раз входит в сумму при белой вершине, а один раз — при черной. В правой же части мы тоже получим нуль, так как число белых вершин равно числу черных. Полученное противоречие ($0<0$) и доказывает наше утверждение.

Точно такое же рассуждение можно провести, если отмеченные вершины срезать не одной, а несколькими плоскостями, лишь бы сходящиеся в них грани оставались попарно смежными и не сходились в одной вершине.

Этим способом можно получать и другие достаточные условия. Сейчас стали известны и некоторые необходимые условия того, чтобы многогранник был абсолютно невписываемым, но в целом проблема до сих пор не решена.

Метод относительных углов позволяет решать и другие интересные задачи.

З а д а ч а 7. *Пусть в каждой вершине многогранника M сходятся три грани, а у каждой его грани четное число сторон. Доказать, что если все, кроме одной, вершины многогранника M лежат на сфере, то многогранник M вписанный.*

У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 6. Не пропускать такой неприятной возможности: ребра, исходящие из вершины, не лежащей на сфере, касаются сферы.

Аналогичная, но более сложная.

З а д а ч а 8. *Пусть все вершины многогранника M разбиты на черные и белые, как это описано в задаче 5, и число черных вершин равно числу белых. Доказать, что если все, кроме одной, вершины многогранника M лежат на сфере, то многогранник M вписанный.*

Таким образом, если вершины можно разбить на черные и белые, как это описано в задаче 5, то либо многогранник абсолютно невписываемый, либо удовлетворяет задаче 8, т. е.

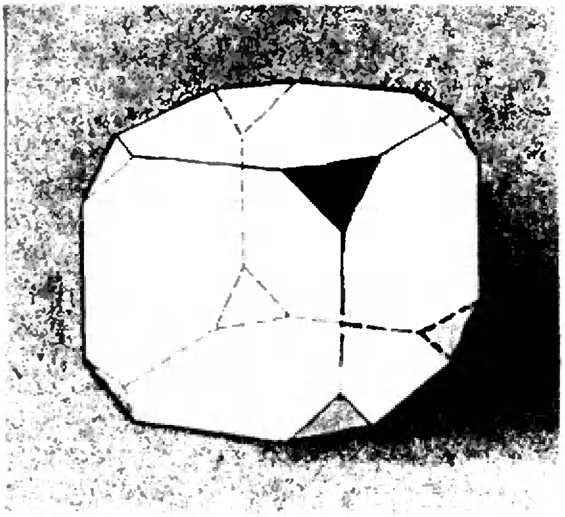


Рис. 8. Этот многогранник нельзя описать около сферы

из того, что на сфере лежат все его вершины, кроме одной, следует, что он вписанный.

Простейшим примером абсолютно невписываемого многогранника является куб с одной срезанной вершиной (см. рис. 1).

В заключение остается сознаться, что Штейниц доказал отнюдь не ту теорему, которая называется его именем, но двойственное к ней утверждение, которое мы сформулируем в виде задачи.

Задача 9. *Пусть все грани многогранника М можно разбить на черные и белые так, чтобы*

I. *Число черных граней было больше, чем число белых.*

II. *Никакие две черные грани смежными не являются.*

Доказать, что многогранник М нельзя описать вокруг сферы.

На рисунке 8 изображен один из самых простых примеров *абсолютно неописываемого* многогранника — куб, у которого срезаны все вершины.

БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Известно, что $x<1$. Попробуйте выяснить, чему равно бесконечное произведение $(1+x+x^2+\ldots+x^9)\times\times(1+x^{10}+x^{20}+\ldots+x^{90})\cdot(1+x^{100}+x^{200}+\ldots+x^{900})\ldots$

ОТКУДА ВЗЯЛИСЬ РАВЕНСТВА?

Попробуйте выяснить, на чем основаны числовые равенства:

$$\frac{41^3+25^3}{41^3+16^3}=\frac{41+25}{41+16},$$

$$\frac{73^3+37^3}{73^3+36^3}=\frac{73+37}{73+36},$$

$$\frac{81^3+18^3}{81^3+63^3}=\frac{81+18}{81+63}.$$

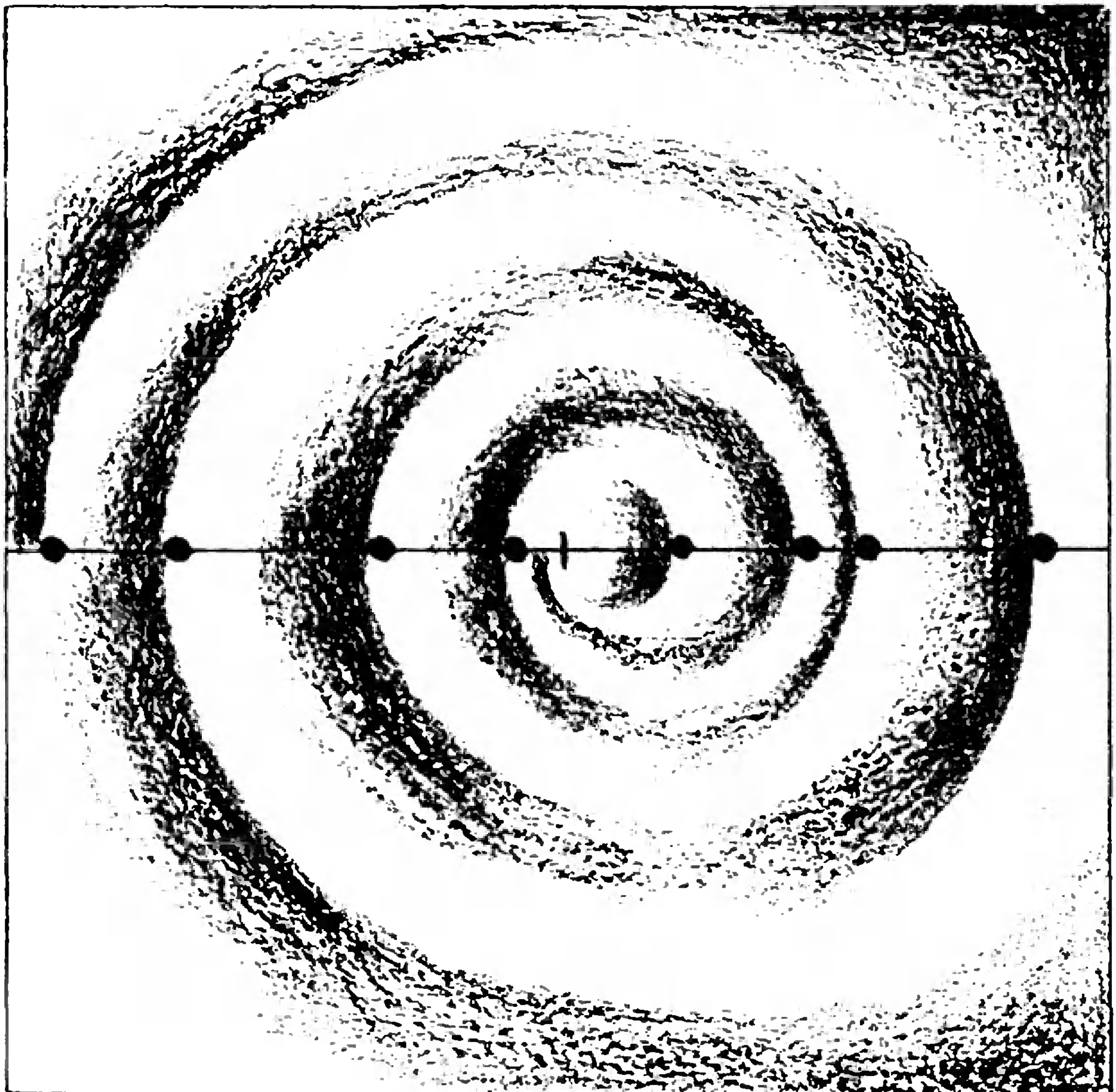
Не сможете ли вы сами составить такое равенство с другими числами?

ЕЩЕ РАЗ ОБ АЛЕНУШКЕ И ЕЕ БРАТЦЕ ИВАНУШКЕ

Братец Иванушка и сестрица Аленушка живут на полуострове (см. рис.). Иванушка живет в домике *А*, Аленушка — в домике *В*. Иванушка собрался в гости к Аленушке и взял с собой два ведра, чтобы зачерпнуть одним киселя из кисельной реки, другим — молока из молочной. Какой маршрут должен выбрать Иванушка, чтобы кратчайшим путем попасть к Аленушке?

Бесконечные цепные дроби

Н. М. Бескин



I. Введение

1. Постановка вопроса. В предыдущей статье («Квант», № 1) была намечена проблема представления любого действительного числа цепной дробью. Однако она не была разрешена. Отправляясь в дальнейший путь, отдадим себе отчет в том, что сделано и что осталось сделать.

Проблема состоит из двух частей.

Первая часть. Указать способ, которым каждому действительному числу α ставится в соответствие цепная дробь. Такой способ был указан в виде процесса, в котором чередовались два шага (см. «Квант» № 1, стр. 21).

Если число α рациональное, то процесс обрывается и получается конечная цепная дробь. Если же α — иррациональное, то процесс оказывается бесконечным и порождает бесконечный символ

$$\alpha \sim [a_0; a_1, a_2, \ldots] \qquad (1.1)$$

В первой статье уже были такие примеры. Приведем еще некоторые геометрические задачи такого типа.

Пример 1. В равнобедренном треугольнике с углом при вершине 108° выразить (в виде цепной дроби) отношение основания к боковой стороне.

В треугольнике ABC (рис. 1) углы 108°, 36°, 36°. Откладываем $BB_1 = b$ (ясно, что b уложится в a один раз, потому что $a < 2b$).

Имеем

$$\frac{a}{b} = \frac{BC}{BB_1} = \frac{BB_1 + B_1C}{BB_1} = 1 + \frac{B_1C}{BB_1} = 1 + \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{AC}{B_1C}.$$

Но треугольник B_1AC подобен исходному треугольнику ABC (подсчитайте углы). В первой формуле мы определяли отношение $\frac{a}{b}$ основания к боковой стороне. Во второй — мы опять стоим перед той же задачей: x_1 есть отношение основания к боковой стороне в треугольнике с теми же углами. Если после первого шага мы возвращаемся в исходное положение, то процесс не будет иметь конца. Можно написать

$$\frac{a}{b} \sim [1; 1, 1, \ldots]. \qquad (1.2)$$

Легко доказать, что

$$\frac{b}{a} \sim [0; 1, 1, \ldots]\text{*)}. \qquad (1.3)$$

Пример 2. Выразить отношение стороны правильного десятиугольника, вписанного в окружность, к радиусу.

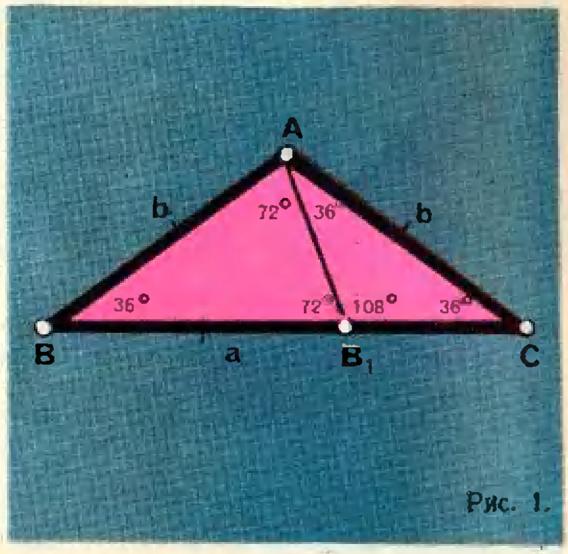


Рис. 1.

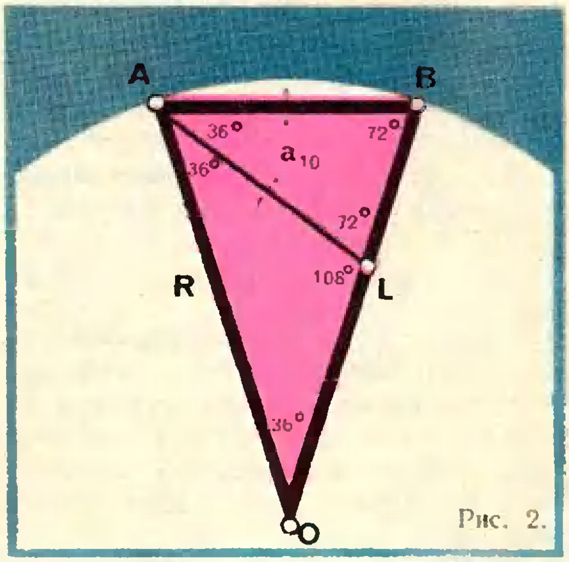


Рис. 2.

*) См. задачу 4 в конце статьи.

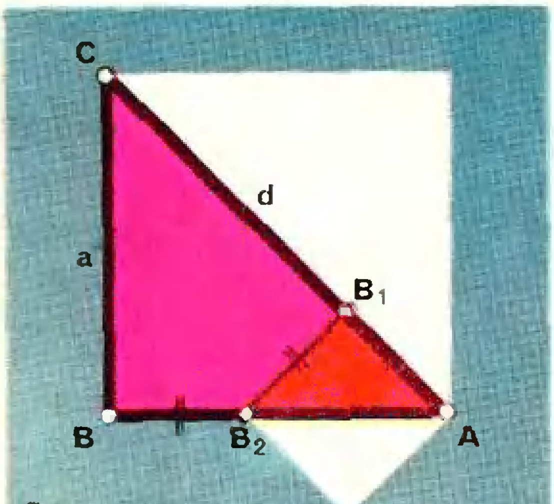


Рис. 3.

На рисунке 2 O — центр окружности, $AB=a_{10}$, AL — биссектриса угла A. Ясно, что $AB=AL=OL$;

$$\frac{a_{10}}{R}=\frac{AL}{OA}.$$

Но треугольник LOA имеет те же углы, что и треугольник на рисунке 1. Значит,

$$\frac{a_{10}}{R}\sim[0;1,1,\ldots]. \qquad (1.4)$$

П р и м е р 3. Выразить отношение диагонали квадрата к стороне.

Этот пример сложнее примера 1. Там мы после одного шага процесса возвращаемся к исходному положению, а здесь — после двух шагов (рис. 3).

Исходная позиция: надо откладывать сторону по диагонали. Она отложится один раз (рис. 3). Имеем

$$\frac{d}{a}=\frac{CA}{CB}=\frac{CB_1+B_1A}{CB}=1+\frac{1}{x_1},$$

$$x_1=\frac{CB}{B_1A}=\frac{AB}{AB_1}.$$

Строим $B_1B_2\perp AC$. Тогда $BB_2=B_1B_2$ (докажите сами). Треугольник AB_1B_2 дополним до квадрата (только для наглядности, для доказательства это не нужно). Теперь откладываем AB_1 по BA. Отложим один раз — получим BB_2. Остается B_2A. Надо продолжать откладывать AB_1 по B_2A, но это и есть исходная позиция: откладывать сторону квадрата по диагонали. Значит, процесс бесконечен, т. е.

$$x_1=1+\left(1+\frac{1}{x_1}\right)=2+\frac{1}{x_1},$$

$$\frac{d}{a}\sim[1;2,2,2,\ldots] \qquad (1.5)$$

$$\frac{a}{d}\sim[0;1,2,2,\ldots] \qquad (1.6)$$

Но мы, кажется, увлеклись интересными примерами. Вернемся к постановке проблемы.

В т о р а я ч а с т ь. Указать способ, которым каждой цепной дроби ставится в соответствие действительное число α. Если эта цепная дробь получена разложением числа α, то искомый способ должен приводить к этому самому числу α.

Вторая часть проблемы пока решена только для конечных цепных дробей. Конечную цепную дробь можно «свернуть», т. е. представить ее в виде обыкновенной («двухэтажной») дроби. С бесконечной цепной дробью этого сделать нельзя. Бесконечная цепная дробь (1.1) пока только символ. Ее можно рассматривать как узор или украшение, но она не имеет смысла. Поэтому в формулах (1.1)—(1.6) мы пишем знак соответствия, а не знак равенства. Например, формула (1.6) выражает, что если к отношению $\frac{a}{d}$ применить процесс разложения в цепную дробь, то получится $[0;1,2,2,\ldots]$. Но нельзя утверждать, что левая часть равна правой, потому что правая пока не есть число.

Приписать смысл символу

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ldots]$$

это и есть цель настоящей статьи.

Но к этой цели ведет длинный путь.

2. П р и н ц и п в л о ж е н н ы х о т р е з к о в. Предполагается, что читатель в какой-нибудь форме знаком с теорией действительных чисел, т. е. знает, как вводятся иррациональные числа и что такое бесконечная десятичная дробь.

Напомним важный для дальнейшего принцип вложенных отрезков *).

*) Из дальнейшего краткого изложения вряд ли можно глубоко усвоить этот тонкий принцип. Мы предполагаем, что читатель был знаком с ним раньше. Если же нет, советуем прочесть, например: Н. Я. В и л е н к и н и С. И. Ш в а р ц б у р д. Математи-

Если на прямой дана бесконечная последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$, обладающая двумя свойствами:

1) каждый следующий отрезок вложен в предыдущий,

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n;$$

2) длины отрезков стремятся к нулю при $n \to \infty$,

то существует точка x и притом единственная, которая принадлежит всем этим отрезкам.

Пояснение 1. Отрезок $[a, b]$ содержит все точки прямой, лежащие между a и b, *а также точки* a и b. Интервал (a, b) содержит только точки между a и b, но не содержит концов. Значит, отрезок $[a, b]$ содержит две лишние точки по сравнению с интервалом (a, b).

Пояснение 2. Второе свойство означает: если фиксировать *любое* число ε строго большее нуля, то в данной последовательности найдется отрезок меньшей длины, т. е. найдется такой номер n, что будет $a_nb_n < \varepsilon$ (символ a_nb_n выражает длину отрезка $[a_n, b_n]$). Разумеется, все отрезки с номерами, большими чем n, тоже будут меньше ε.

Принцип вложенных отрезков выражает непрерывность прямой. Где бы ни стягивались эти отрезки, на прямой всюду окажется точка. Если из прямой удалить хоть одну точку, то для оставшегося множества точек этот принцип уже неверен. Удалим, например, на числовой оси точку O и рассмотрим множество отрезков

$$[-1, 1], \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \ldots, \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \ldots \text{*)}$$

Не существует точки, принадлежащей им всем: они стягиваются к пустому месту.

Точки числовой оси для краткости формулировок принято отождествлять с соответствующими числами: говорят «точка x» и «число x», не делая различия.

Действительные числа заполняют всю числовую ось сплошь, т. е. существует взаимно однозначное соответствие между действительными числами и точками числовой оси. Поэтому *принцип вложенных отрезков справедлив и для множества действительных чисел.* Для множества рациональных чисел он неверен.

II. Свойства подходящих дробей

Для решения проблемы, поставленной в первой части, нам необходимо изучить более подробно свойства подходящих дробей.

3. Закон образования подходящих дробей. Обрывая цепную дробь после каждого неполного частного, мы получим последовательность рациональных чисел

$$\alpha_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1},$$

$$\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1a_0+1}{a_1} \text{ и т. д.}$$

Примечание. Это в равной степени относится к конечным и к бесконечным цепным дробям. Хотя смысл бесконечной цепной дроби нам пока неизвестен, смысл чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ вполне ясен.

Договоримся отныне под нулевой и первой подходящими дробями подразумевать только те формы, которые записаны в правых частях последних формул. Это значит, что мы определенным образом фиксируем числители и знаменатели этих дробей, отдельно взятые:

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = a_0, \; p_1 = a_1a_0 + 1, \\ q_0 = 1, \; q_1 = a_1. \end{array}\right\} \quad (3.1)$$

Например, для цепной дроби $[2; 3, 1, 6]$ α_1 можно записать

ческий анализ (учебное пособие для IX—X классов средних школ с математической специализацией), М., «Просвещение», 1969, гл. I, стр. 31.

*) Это не будут отрезки прямой: у них у всех прокол внутри. Это—отрезки рассматриваемого множества из двух лучей. Отрезок $[-1, 1]$ содержит концы -1 и 1 и все промежуточные точки данного множества.

разными способами:

$$2\frac{1}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{14}{6},\ \frac{21}{9}\ \text{и т. д.},$$

но подходящей дробью считается только $\frac{7}{3}$, а $\frac{14}{6}$ мы впредь не будем называть подходящей дробью.

Чтобы от $\frac{p_1}{q_1}$ перейти к $\frac{p_2}{q_2}$, следует заменить a_1 на $a_1+\frac{1}{a_2}$. После несложных преобразований получим

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{a_2(a_1a_0+1)+a_0}{a_2a_1+1}.$$

Если внимательно всматриваться в эту формулу, то проступает такое ее строение:

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1a_2+p_0}{q_1a_2+q_0}.$$

Введем опять соглашение: считать второй подходящей дробью только эту форму, т. е. считать отдельно

$$p_2=p_1a_2+p_0,$$
$$q_2=q_1a_2+q_0.$$

Теперь докажем рекуррентные формулы *)

$$\left.\begin{aligned}p_n&=p_{n-1}a_n+p_{n-2},\\ q_n&=q_{n-1}a_n+q_{n-2},\end{aligned}\right\}\qquad(3.2)$$

которые надо понимать так: если определить p_0, q_0, p_1 и q_1 по формулам (3.1), а затем вычислять по формулам (3.2) $(p_2,\ q_2)$, $(p_3,\ q_3)\ldots$, то каждый раз мы будем получать пару чисел, которую можно принять за числитель и знаменатель n-й подходящей дроби, т. е.

$$\frac{p_n}{q_n}=\alpha_n,$$

а затем мы заключим соглашение принимать за числитель и знаменатель именно эту пару.

*) Рекуррентная формула — формула, выражающая любой элемент последовательности через один или несколько предыдущих. Так, формула для n-го члена геометрической прогрессии $u_n=u_{n-1}q$ рекуррентная, а $u_n=u_1q^{n-1}$ — нет. По рекуррентной формуле нельзя сразу вычислить u_n, а надо последовательно вычислять $u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_{n-1}$.

Доказательство проведем по индукции. Предположим, что числители и знаменатели всех подходящих дробей при $n=2,\ 3,\ \ldots,\ k$ получаются по формулам (3.2)

$$\left.\begin{aligned}p_k&=p_{k-1}a_k+p_{k-2},\\ q_k&=q_{k-1}a_k+q_{k-2}.\end{aligned}\right\}$$

Чтобы перейти к следующей подходящей дроби, надо заменить a_k на $a_k+\frac{1}{a_{k+1}}$:

$$\alpha_{k+1}=\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\frac{p_{k-1}\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)+p_{k-2}}{q_{k-1}\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)+q_{k-2}}=$$

$$=\frac{(p_{k-1}a_k+p_{k-2})a_{k+1}+p_{k-1}}{(q_{k-1}a_k+q_{k-2})a_{k+1}+q_{k-1}}=$$

$$=\frac{p_ka_{k+1}+p_{k-1}}{q_ka_{k+1}+q_{k-1}}.$$

Теперь условимся понимать p_{k+1} и q_{k+1} так:

$$\left.\begin{aligned}p_{k+1}&=p_ka_{k+1}+p_{k-1},\\ q_{k+1}&=q_ka_{k+1}+q_{k-1}.\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

Формулы (*) суть формулы (3.2) при $n=k+1$. Формулы (3.2) верны при $n=2$. Тем самым они доказаны для любого $n\geqslant 2$.

Следствие. Все буквы, входящие в формулы (3.2) (кроме, может быть, $a_0=p_0$), натуральные числа. Отсюда ясно, что знаменатели последовательных подходящих дробей, начиная с $n=2$, возрастают:

$$q_0\leqslant q_1<q_2<q_3<\ldots\text{*}).\qquad(3.3)$$

Формулы (3.2) освобождают нас от утомительного процесса свертывания при вычислении подходящих дробей. Покажем более простой способ.

Будем записывать значения a_i в первой строке; p_i — во второй, q_i — в третьей:

a_0	a_1	a_2	a_3		a_{s-1}	a_s	
p_0	p_1	p_2	p_3	…	p_{s-1}	p_s	…
q_0	q_1	q_2	q_3		q_{s-1}	q_s	

*) См. задачу 5 в конце статьи.

Сначала заполняется вся первая строка и первые два столбца. Дальнейшее заполнение таблицы ведется по следующей схеме:

a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
p_{n-2}	p_{n-1}	
q_{n-2}	q_{n-1}	

1) столбец $\begin{vmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{vmatrix}$ умножить на a_n,

2) к полученному столбцу прибавить предыдущий.

Эту же схему рекомендуется применять, если требуется вычислить значение всей цепной дроби: последний столбец $\begin{vmatrix} p_s \\ q_s \end{vmatrix}$ доставляет ответ.

Поупражняйтесь сами в заполнении таблицы для цепной дроби [0; 3, 14, 1, 2, 5]

0	3	14	1	2	5
0	1	14	15	44	235
1	3	43	46	135	721

4. Разность соседних подходящих дробей. Шаг от n-й подходящей дроби к следующей представляет приращение n-й дроби и обозначается Δ_n:

$$\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}} = \frac{D_n}{q_n q_{n+1}}, \qquad (*)$$

где D_n обозначает числитель

$$D_n = p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}. \qquad (**)$$

Понизим индексы у p_{n+1} и q_{n+1} согласно формулам (3.2):

$$D_n = (p_n a_{n+1} + p_{n-1})\,q_n - p_n\,(q_n a_{n+1} + q_{n-1}) = -(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n).$$

Выражение в скобках того же типа, что и (**), но все индексы на единицу меньше. Значит, оно представляет D_{n-1}:

$$D_n = -D_{n-1}.$$

Это рекуррентное соотношение позволяет понизить индекс до нуля:

$$D_n = -D_{n-1} = D_{n-2} = -D_{n-3} = \ldots = (-1)^n D_0.$$

Для полного успеха остается непосредственно вычислить D_0:

$$D_0 = p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_1 a_0 + 1)\cdot 1 - a_0 a_1 = 1.$$

Следовательно,

$$D_n = p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n, \qquad (4.1)$$

и по формуле (*)

$$\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}. \qquad (4.2)$$

5. Сравнение подходящих дробей по величине.

Свойство 1. *Каждая подходящая дробь с нечетным номером больше соседних дробей (предыдущей и последующей). Каждая подходящая дробь с четным номером меньше соседних дробей.*

Применяя эту формулировку к нулевой и последней подходящим дробям, надо учесть, что у каждой из них только одна соседняя дробь.

Справедливость этого свойства сразу видна из формулы (4.2).

Свойство 1 означает, что последовательные подходящие дроби поочередно то больше, то меньше.

Свойство 2. *Разности между соседними подходящими дробями по абсолютной величине убывают* (имеется в виду: при возрастании номера).

Сравним:

$$|\Delta_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

$$|\Delta_{n+1}| = \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}}.$$

Имеем $q_{n+2} > q_n$. Значит, у второй дроби знаменатель больше, а она сама меньше:

$$|\Delta_{n+1}| < |\Delta_n|.$$

6. Несократимость подходящих дробей. *Все подходящие дроби несократимы.*

Напомним, что числители и знаменатели подходящих дробей образуются по формулам (3.1). Допустим, что дробь $\frac{p_n}{q_n}$ сократима, т. е. ее числитель и знаменатель имеют общий множитель λ, отличный от единицы:

$$p_n = \lambda \dot{p}_n, \quad q_n = \lambda \dot{q}_n.$$

Тогда формула (4.1) дает

$$\lambda(\dot{p}_{n+1} q_n - \dot{p}_n q_{n+1}) = (-1)^n.$$

Мы пришли к абсурдному равенству: левая часть делится на λ, а правая нет. Значит, дробь $\frac{p_n}{q_n}$ несократима.

III. Введение бесконечных дробей

7. Смысл бесконечной цепной дроби. Принцип вложенных отрезков послужит нам ключом, который откроет смысл бесконечной цепной дроби. Напомним аналогичную ситуацию: как истолковать бесконечную десятичную дробь? Бесконечную десятичную дробь можно рассматривать как сокращенную запись последовательности вложенных отрезков: последовательные округления с недостатком дают левые концы этих отрезков, а с избытком — правые. Каков смысл утверждения, что $\sqrt{2}$ выражается бесконечной десятичной дробью

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots?$$

Это значит, что

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5,$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Существует *единственное* число, которое удовлетворяет *сразу всем* этим неравенствам. Это и есть $\sqrt{2}$.

Имея символ бесконечной цепной дроби

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots], \qquad (*)$$

можно образовать бесконечную последовательность конечных цепных дробей

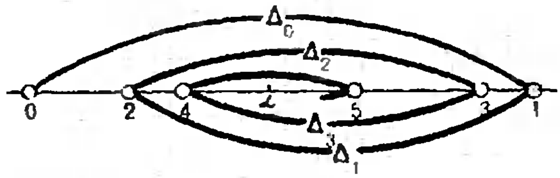


Рис. 4.

$$a_0, [a_0; a_1], [a_0; a_1, a_2], \ldots$$
$$\ldots [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n], \ldots, \qquad (**)$$

которые можно записать в виде подходящих дробей

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots \qquad (***)$$

Эти подходящие дроби определяют последовательность вложенных отрезков

$$\left[\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}\right], \left[\frac{p_2}{q_2}, \frac{p_1}{q_1}\right], \left[\frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}\right],$$
$$\left[\frac{p_4}{q_4}, \frac{p_3}{q_3}\right], \ldots$$

Каждый следующий отрезок вложен в предыдущий (рис. 4) *) и длины их стремятся к нулю (см. формулу (4.2)). Следовательно, существует единственное число α, принадлежащее всем этим отрезкам. *Оно и принимается за значение бесконечной цепной дроби***).

Это определение можно высказать и по-другому. Вот два варианта.

1) *Значение бесконечной цепной дроби заключено между любыми двумя соседними подходящими дробями.*

2) *Значение бесконечной цепной дроби больше каждой подходящей дро-*

*) Пометки 0, 1, 2, ... на рисунке 4 означают *номера* подходящих дробей.

**) Это оправдывает термин «подходящая дробь», она «подходит» все ближе и ближе к точке α.

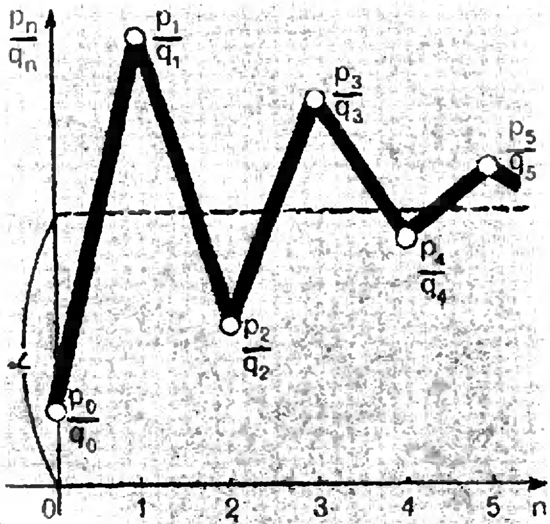


Рис. 5.

би с четным номером и меньше каждой подходящей дроби с нечетным номером (все это хорошо видно на рисунке 5).

Важно понять, что любая из этих формулировок определяет единственное число.

Легко показать (сделайте это), что если иррациональное число α разлагать в цепную дробь, то последовательные подходящие дроби поочередно то меньше, то больше α. Отсюда следует, что это число α и есть то значение, которое теперь приписано бесконечной цепной дроби (единственность точки, принадлежащей всем отрезкам!). Отныне разрешается писать

$$\alpha = |a_0;\ a_1, a_2, \dots|.$$

Теперь ясно, что каждую подходящую дробь можно считать приближенным значением цепной дроби. Чем больше номер, тем приближение точнее.

Почти то же самое говорилось об аппроксимации конечной цепной дроби подходящими дробями. Разница только в том, что в *случае бесконечной цепной дроби не существует последней подходящей дроби, и значит, ни одна подходящая дробь не дает точного значения цепной дроби.*

Для бесконечных цепных дробей сохраняется признак равенства («Квант», № 1, стр. 22). Сформулируем его так:

1) Две бесконечные цепные дроби $|a_0;\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots|$ и $|b_0;\ b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n, \dots|$ равны между собой в том и только в том случае, если у них совпадают соответственные элементы, т. е. $a_n = b_n$ при $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$

2) Бесконечная цепная дробь не может быть равна конечной.

8. Аппроксимация подходящими дробями. Помнит ли читатель, ради чего мы пустились в это длинное плавание? Мы ищем выгодный способ аппроксимации действительных чисел (в том числе и рациональных) рациональными.

Что такое! Не опечатка ли это? Разве можно аппроксимировать рациональные числа рациональными?

Можно. Например,

$$\frac{6187}{7425} \approx \frac{5}{6}.$$

В этом примере мы громоздкое рациональное число заменяем более простым.

Когда мы ознакомились с цепными дробями, естественно возникает такой проект: *разложить число α в цепную дробь и считать последовательные подходящие дроби за приближенные значения этого числа.* Другими словами, *усекать* цепную дробь, отбрасывая все элементы, начиная с некоторого, и принимать оставшуюся усеченную дробь за приближенное значение полной цепной дроби. Именно так мы поступаем, усекая десятичную дробь и оставляя лишь желательное число цифр после запятой.

Для того чтобы принять или забраковать этот проект, надо выяснить, какую погрешность мы допускаем, заменяя число α подходящей дробью, т. е. полагая

$$\alpha \approx \frac{p_n}{q_n}.$$

Во всех дальнейших рассуждениях предполагается, что дробь $\frac{p_n}{q_n}$ *не нулевая и не последняя.* Для $n = 0$ использование цепных дробей не дает ничего нового по сравнению с использованием десятичных дробей, а случай $n = s$ неинтересен, так как мы получаем $\alpha = \alpha$ и погрешность равна нулю.

Вспомним, что α заключается между $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

Следовательно,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right|$$

или, согласно формуле (4.2),

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Эта оценка не очень удобна, потому что, когда мы используем для аппроксимации какую-нибудь подходящую дробь, то знаменатель следующей дроби может быть неизвестен. Поэтому заметим, что $q_n < q_{n+1}$, и мы лишь усилим предыдущее неравенство, заменив q_{n+1} на q_n:

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}. \qquad (8.1)$$

Это неравенство показывает, что подходящие дроби дают очень выгодную аппроксимацию.

9. Природа чисел, выраженных цепными дробями. Всякая конечная цепная дробь выражает рациональное число, и обратно, всякое рациональное число изображается конечной цепной дробью.

Отсюда следует, что всякая бесконечная дробь выражает иррациональное число.

Верно ли обратное? Ясно, что иррациональное число не может изображаться конечной цепной дробью, но может быть его нельзя изобразить никакой цепной дробью? Или можно изобразить, но не единственным образом?

К счастью, эти страхи напрасны. *Всякое иррациональное число выражается бесконечной цепной дробью и притом единственным образом*. Для доказательства следует показать, что в процессе разложения иррационального числа в цепную дробь каждый элемент определяется единственным образом.

Пусть, например, требуется разложить число π в цепную дробь. Первый элемент a_0 есть наибольшее целое число, содержащееся в π. Значит,

$$\pi = 3 + \frac{1}{x_1}.$$

Отсюда $x_1 = \frac{1}{\pi - 3} \approx 7{,}07$. Следующий элемент a_1 есть наибольшее целое число, содержащееся в x_1, т. е. 7 и т. д., и т. д.

Из множества всех бесконечных цепных дробей целесообразно выделить подмножество периодических дробей. Оказывается, эти дроби соответствуют квадратичным иррациональностям. Квадратичной иррациональностью называется число вида $r + s\sqrt{N}$, где r и s — рациональные числа, а N — натуральное число, но не полный квадрат. Иначе говоря, квадратичные иррациональности — это иррациональные числа, которые получаются при решении квадратных уравнений с целыми коэффициентами.

Всякая периодическая цепная дробь выражает квадратичную иррациональность, и обратно, всякая квадратичная иррациональность изображается периодической цепной дробью.

Примеры, иллюстрирующие это положение, встречались в первой статье. В процессе их решения попытайтесь сами доказать, что так должно получиться всегда.

10. Наилучшие приближения. Подходящие дроби очень выгодны для аппроксимации действительных чисел. Поскольку слово «выгодность» не имеет в математике определенного смысла, то, употребляя его, надо каждый раз объяснять, что мы под ним разумеем.

В предыдущей статье была приведена одна теорема, характеризующая выгодность подходящих дробей*). Теперь мы располагаем нужными средствами для ее доказательства.

Число α принадлежит отрезку Δ_n между двумя подходящими дробями $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ (рис. 6). Длина этого от-

*) «Квант», № 1, стр. 23.

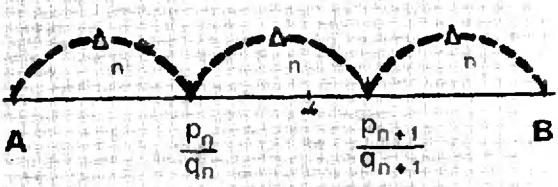


Рис. 6.

резка есть $|\Delta_n| = \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$. Точка α может быть внутренней точкой этого отрезка или может совпадать с $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ (если α рационально и $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ есть *последняя* подходящая дробь). Таким образом,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant |\Delta_n|. \qquad (10.1)$$

Пусть $\dfrac{p}{q}$ — какая-нибудь дробь, знаменатель которой меньше q_n и тем самым меньше q_{n+1}:

$$q < q_n < q_{n+1}. \qquad (10.2)$$

Так как подходящие дроби несократимы, то из неравенств (10.2) следует, что

$$\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}, \quad \frac{p}{q} \neq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

Ясно, что

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|pq_n - p_n q|}{qq_n} \geqslant \frac{1}{qq_n},$$

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{|pq_{n+1} - p_{n+1} q|}{qq_{n+1}} \geqslant \frac{1}{qq_{n+1}}.$$

Эти неравенства еще усилятся, если заменить q большей величиной q_{n+1} или q_n:

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{q_{n+1} q_n} = |\Delta_n|,$$

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| > \frac{1}{q_n q_{n+1}} = |\Delta_n|.$$

Смысл последних двух неравенств таков: дробь $\dfrac{p}{q}$ удалена от каждого из концов отрезка $\left[\dfrac{p_n}{q_n}, \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right]$ на расстояние большее, чем длина этого отрезка $|\Delta_n|$. Откладывая от точек $\dfrac{p_n}{q_n}$ и $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ влево и вправо отрезок $|\Delta_n|$ (рис. 6), получим запретную зону AB, в которой не может находиться дробь $\dfrac{p}{q}$ (точки A и B тоже запретны). Теперь ясно, что $\dfrac{p}{q}$ есть худшее приближение для числа α, чем $\dfrac{p_n}{q_n}$. В самом деле,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant |\Delta_n|,$$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > |\Delta_n|.$$

Заметим, что обратная теорема неверна, т. е. встречаются дроби, которые не служат подходящими и тем не менее дают лучшее приближение для числа α, чем любая дробь с меньшим знаменателем. Например, из таблицы на стр. 18 («Квант», № 1) видно, что этим свойством обладают приближения числа π дробями $\dfrac{19}{6}$, $\dfrac{16}{5}$ и $\dfrac{13}{4}$. Поэтому доказанная теорема не означает, что подходящие дроби лучше всех других для аппроксимации действительных чисел. Но вот две гораздо более сильные теоремы, которые мы приведем без доказательства.

Для подходящей дроби коэффициент выгодности *) $\lambda = \dfrac{1}{2\,|q_n\alpha - p_n|}$ *больше, чем для любой другой дроби с меньшим знаменателем.*

Наконец, самое удивительное: верна и обратная теорема, т. е. иметь такой большой коэффициент выгод-

*) «Квант», № 1, стр. 18.

ности — монополия подходящих дробей. Это очень тонкое свойство не может не вызвать волнения у всякого читателя, который любит числа.

Если для числа α и дроби $\frac{p}{q}$ коэффициент выгодности $\lambda = \frac{1}{2|q\alpha - p|}$ больше, чем для любой дроби с меньшим знаменателем, то $\frac{p}{q}$ есть подходящая дробь для α.

П р и м е р. Из той же таблицы для числа π видно, что дробь $\frac{22}{7}$ дает приближение π с бо́льшим коэффициентом выгодности, чем дроби со знаменателями 1, 2, 3, 4, 5, 6. Следовательно, *еще не зная разложения π в цепную дробь*, на основании последней теоремы мы можем заключить, что $\frac{22}{7}$ есть подходящая дробь.

Есть еще много теорем такого типа. Все они с разных точек зрения подтверждают одно и то же: *если нужно аппроксимировать действительное число несложными рациональными числами, то выгоднее всего использовать подходящие дроби.*

Это и есть драгоценный ключ к загадкам, о которых говорилось в первой статье.

З а д а ч и.

1. Выразить (в виде цепной дроби) отношение основания к боковой стороне в равнобедренном треугольнике с углом 120°.

2. Найти значение цепной дроби в формуле (1.2). Найти cos 36°.

3. Найти значение цепной дроби в формуле (1.4). Выразить a_{10} через R. Найти sin 18°.

4. Имея разложение в цепную дробь (конечную или бесконечную) числа α, найти разложение числа $\frac{1}{\alpha}$.

5. В статье сказано, что знаменатели подходящих дробей возрастают (неравенства (3.3)). Можно ли сказать то же самое о числителях?

МАКС ПЛАНК ОБ ОБУЧЕНИИ

Не так важно, чему учат в школе, а важно, как учат. Одно действительно понятое учеником математическое предложение имеэт бо́льшую ценность, чем десять формул, которые он заучил наизусть и даже знает, как применять, но не понял их действительного смысла. Функция школы не в том, чтобы дать специальный опыт, а в том, чтобы выработать последовательное методическое мышление. Могут возразить, что в конечном итоге умение делать вещи важнее знания их. Конечно, знание без умения не имеет значения, так же как всякая теория получает свое значение в конце концов лишь благодаря ее применению. Но теория никогда не должна заменяться простым умением, которое будет беспомощным перед лицом необычных фактов. Поэтому первым условием хорошей работы в будущем является основательное элементарное обучение. При этом важно заботиться не столько об изучении большого числа фактов, сколько о правильной их трактовке. Если это предварительное обучение не будет проводиться в школе, то его трудно будет получить впоследствии, так как специальные и высшие школы имеют другие задачи. Последней, самой высокой задачей воспитания является не знание и не умение, а практическая деятельность. Но так же как практической деятельности предшествует умение, необходимыми условиями появления умения служат знание и понимание.

(Макс Планк. Из речи «Происхождение и влияние научных идей». 1933 г.)

О форме дождевой капли

И. Ш. Слободецкий

О форме дождевой капли часто говорят как об эталоне обтекаемости, однако, как показывают мгновенные фотографии падающей капли (рис. 1), она вовсе не имеет красивой сигарообразной обтекаемой формы. Маленькая дождевая капля с диаметром менее одного миллиметра практически сферична, а большая — напоминает крошечную сдобную булочку.

Попытаемся выяснить, с чем связана «булочная» форма капли. Для этого нужно разобраться в роли сил, действующих на каплю. На каплю действуют: сила поверхностного натяжения, сила сопротивления воздуха и, конечно, сила тяжести.

Какова роль силы поверхностного натяжения? Она стремится сделать площадь поверхности капли как можно меньше. Наименьшую поверхность при одном и том же объеме имеет шар, поэтому, если бы падающая капля не испытывала сопротивления воздуха и двигалась только под действием силы тяжести, сообщающей всем участкам капли одинаковое ускорение свободного падения (в этом

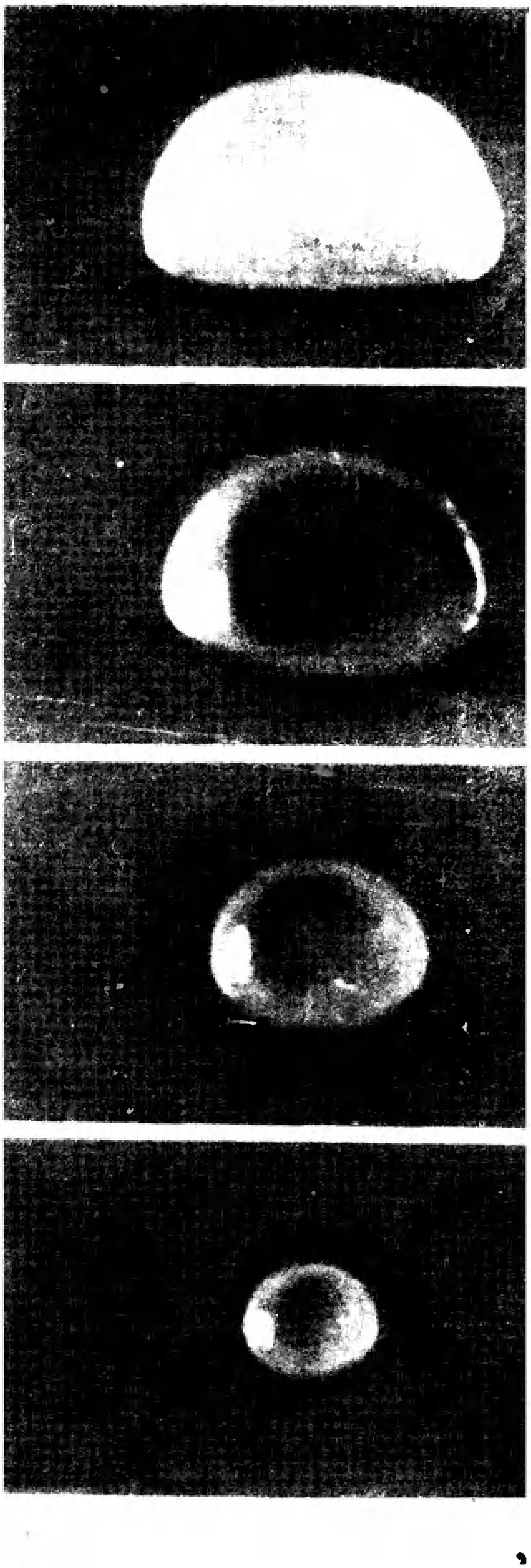


Рис. 1. Мгновенные фотографии падающих капель воды. Объем верхней капли равен объему сферы диаметром 6,5 *мм*. Скорость падения этой капли — 8,9 *м/сек*. Соответствующие цифры для остальных капель: вторая — 6 *мм*, скорость — 8,8 *м/сек*, третья — 4,8 *мм*, скорость — 8,3 *м/сек*, четвертая — 2,8 *мм*, скорость — 6,8 *м/сек*. Эти фотографии взяты из статьи «The shape of raindrops», J. Mc. Donald, Scientific American, v. 190 (1954 г.).

случае капля находилась бы в состоянии «невесомости»), то поверхность капли была бы сферической.

Стремление поверхности капли уменьшаться приводит к сжатию капли. А это значит, что давление, под которым находится жидкость внутри капли, становится больше внешнего атмосферного давления.

Нетрудно вычислить величину добавочного давления, которое испытывает жидкость в капле со стороны своей сферической поверхности. Разделим каплю воображаемой плоскостью на две равные части (рис. 2). Оба полушария притягиваются друг к другу силами поверхностного натяжения. Эти силы показаны на рисунке стрелками. На каждую единицу длины границы, разделяющей оба полушария (этой границей служит окружность экватора), действует сила, равная коэффициенту поверхностного натяжения жидкости σ. Так как длина границы равна $2\pi r$, то вся сила F взаимного притяжения между половинками капли равна $2\pi r\sigma$. Эта сила и создает в капле дополнительное давление.

Вспомним, что давление численно равно отношению силы к площади. Поэтому давление Δp, вызванное силой F, равно

$$\frac{F}{\pi r^2}=\frac{2\pi r\sigma}{\pi r^2}=\frac{2\sigma}{r}.$$

Добавочное давление Δp, созданное поверхностным натяжением, обратно пропорционально радиусу капли. Велико ли это добавочное давление в капле? Вычислим для примера добавочное давление в капле диаметром в два микрона. Из таких капель часто состоят облака. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}078$ *н/м*. Поэтому

$$\Delta p=\frac{2\sigma}{r}=\frac{2\cdot 0{,}078}{10^{-6}}\frac{н/м}{м}\approx$$

$$\approx 1{,}6\cdot 10^5\ н/м^2=1{,}6\ \text{атмосферы!}$$

Формула $\Delta p=\frac{2\sigma}{r}$ верна только для сферической поверхности. Если проделать аналогичный расчет для

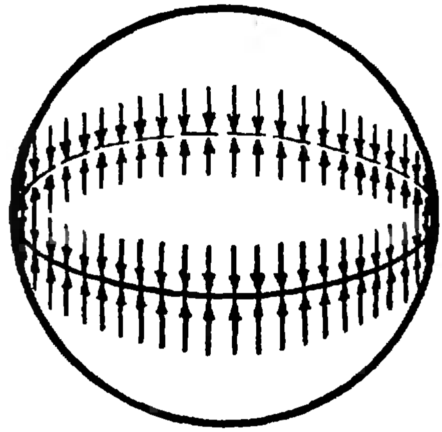


Рис. 2

случая, когда жидкость находится под цилиндрической поверхностью, то окажется, что $\Delta p=\frac{\sigma}{r}$. Следовательно, меняется лишь коэффициент перед отношением $\frac{\sigma}{r}$. И вообще, давление, которое оказывает любая поверхность на находящуюся под ней жидкость, пропорционально отношению $\frac{\sigma}{r_{ср}}$, где $r_{ср}$ — это некоторый средний радиус кривизны этой поверхности.

Но вернемся к падающей дождевой капле. Для нее все осложняется тем, что на каплю действует еще сила сопротивления воздуха. Эта сила направлена против силы тяжести и возрастает с увеличением скорости падения капли.

Раз сила тяжести постоянна, а направленная в противоположную сторону сила сопротивления воздуха растет, непременно наступит такой момент, когда эти силы сравняются. Как только это произойдет, результирующая сила станет равной нулю, и скорость капли уже не будет меняться. Капля будет падать равномерно (по инерции). Такая капля ведет себя так же, как и в состоянии покоя. Это обстоятельство существенно сказывается на форме капли, делая ее куда менее совершенной.

Чтобы понять, как равномерное

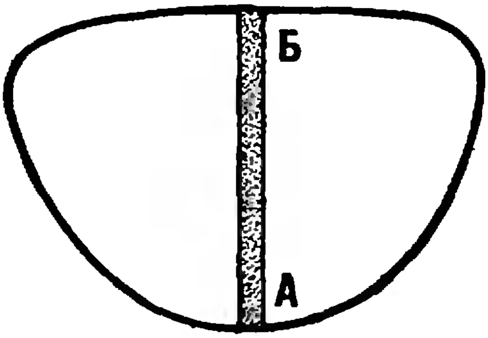


Рис. 3.

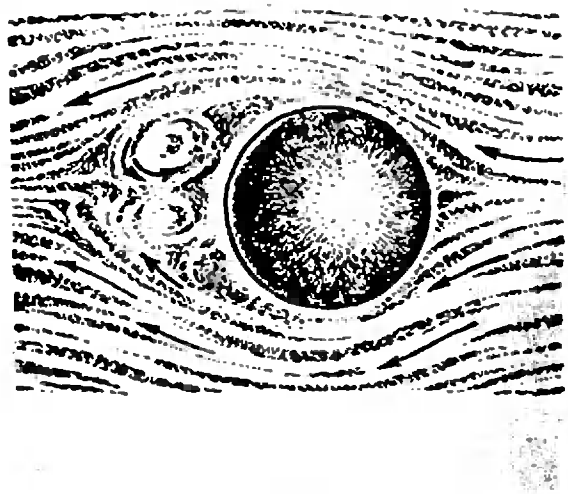


Рис. 4.

движение капли приводит к искажению ее сферической формы, обратимся к рисунку 3.

Для того чтобы столбик воды высотой h в центральном сечении капли двигался равномерно, сила f_1, действующая на него снизу, должна превышать силу f_2, действующую на столбик сверху, ровно на величину силы тяжести, действующей на столбик, то есть $f_1 - f_2 = mg$, где m — масса столбика.

Масса столбика $m = \rho V$. Здесь ρ — плотность воды, а V — объем столбика, равный hS (S — площадь сечения столбика). Значит, $f_1 - f_2 = \rho g h S$. А разность давлений, соответствующая этой разности сил, равна

$$\frac{f_1 - f_2}{S} = \rho g h.$$

Итак, давление в точке A должно быть больше давления в точке $Б$ (рис. 3) на величину $\rho g h$. Эта разность давлений позволяет нижним слоям столбика удерживать верхние.

Как же это сказывается на форме капли?

Для того чтобы давление в точке A было больше давления в точке $Б$, радиус кривизны поверхности r в этой точке должен быть меньше (в соответствии с формулой $\Delta p = 2\frac{\sigma}{r}$), чем радиус кривизны в точке $Б$.

Мы приходим к любопытному выводу: если атмосферное давление всюду одинаково, то дно капли должно быть более выпуклым, то есть иметь большую кривизну, чем верхушка. Такое отклонение от сферической формы незаметно для мелких капелек, парящих в восходящих потоках воздуха. Радиус подобной капли равен приблизительно одному микрону, и гидростатическая разность давлений $\rho g h$ составляет величину порядка $2 \cdot 10^{-5}$ $н/м^2 \approx 2 \cdot 10^{-10}$ $ат$. Эта разность давлений настолько мала по сравнению с 1,6 атмосферы избыточного давления Δp в такой капле, что заметить вызванное ею отклонение от сферичности практически невозможно. Такая капля может по праву считаться эталоном сферической формы. Иное дело — крупная капля.

Для капли диаметром 5—6 *мм*, падающей на землю во время летней грозы, гидростатическая разность давлений равна примерно

$$10^3\ кг/м^3 \cdot 10\ м/сек^2 \cdot 6 \cdot 10^{-3}\ м \approx$$
$$\approx 60\ н/м^2 \approx 6 \cdot 10^{-4}\ ат.$$

Эта величина вполне сравнима с давлением $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$, вызванным силами поверхностного натяжения.

Действительно, в этом случае

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{2 \cdot 0{,}078\ н/м}{6 \cdot 10^{-3}\ м} \approx 30\ н/м^2 \approx$$
$$\approx 3 \cdot 10^{-4} ат.$$

Поэтому влияние гидростатической

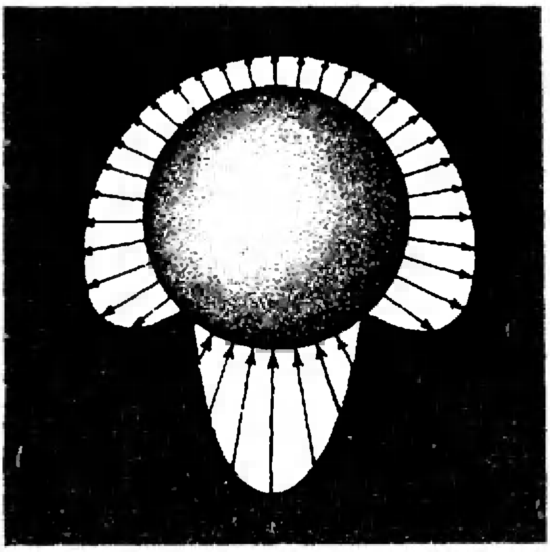


Рис 5. Распределение давления вокруг шарика, обтекаемого потоком воздуха. Длины стрелок пропорциональны разности давления на поверхность шарика и атмосферного давления вдали от шарика.

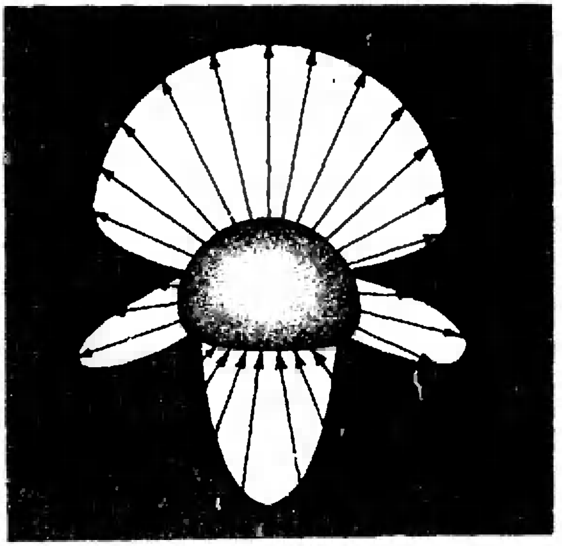


Рис. 6. Распределение давления вокруг падающей капли. Длины стрелок, как и на предыдущем рисунке, пропорциональны разности давления на поверхности капли и атмосферного давления вдали от капли.

разности давлений на форму капли должно быть заметным, и нижняя поверхность капли должна быть заметно более выпуклой, чем верхняя. Но это находится в противоречии с фотографиями падающей капли (рис. 1). В чем же тут дело?

Все дело в том, что давление воздуха в разных точках вокруг капли совсем не одинаково, как это мы вначале предполагали. Оказывается, при больших скоростях, с которыми падают крупные дождевые капли, позади нее возникает запутанное вихреобразное движение воздуха (рис. 4). В области, как говорят, «турбулентного хвоста» давление воздуха ниже, чем давление вдали от капли. В то же время давление перед каплей, наоборот, оказывается выше, чем давление воздуха вдали от капли. Разность давлений на дно и на верхушку капли создает силу сопротивления при падении капли в воздухе. Эту силу называют лобовым сопротивлением.

Можно оценить величину лобового сопротивления. Пусть S — площадь поперечного сечения капли, а v — ее скорость. За время Δt падающая капля проходит расстояние $v\Delta t$, увлекая за собой объем воздуха $Sv\,\Delta t$ с массой $m=\rho_0 Sv\,\Delta t$ (ρ_0 — плотность воздуха). Этой, пришедшей в движение массе воздуха, передается импульс $mv=\rho_0 Sv^2\,\Delta t$. В соответствии со вторым законом Ньютона на воздух со стороны капли действует сила

$$F=\frac{\rho_0 Sv^2\Delta t}{\Delta t}=\rho_0 Sv^2.$$

По третьему закону Ньютона точно такая же по величине сила, но только противоположно направленная, действует на каплю со стороны воздуха.

В реальных условиях воздух приобретает не всю скорость, а только часть ее, но соотношение $F=A\rho_0 Sv^2$

остается справедливым. A — безразмерный коэффициент, зависящий от формы тела. Для шара, например, $A=0{,}2$, для диска $A=0{,}6$. Этот коэффициент находят экспериментально.

Из формулы для лобового сопротивления можно найти давление, оказываемое потоком на переднюю поверхность тела. Оно равно $\frac{F}{S}=A\rho_0 v^2$. Вокруг тела давление меняется от точки к точке. Для шара, например, разность давления у поверхности и статического давления далеко от поверхности меняется так, как показано на рисунке 5.

Изготовив модель капли, можно продуть ее в аэродинамической трубе и измерить давление вокруг нее (рис. 6). Опыты показывают, что для шестимиллиметровой капли давление на дно такое же, как и у диска ($A=0{,}6$). При этом давление на дно на $4{,}6\cdot10^{-4}$ *ат* больше атмосферного, а давление на верхушку — на $2{,}1\cdot10^{-4}$ *ат* меньше атмосферного, то есть разность давлений на дно и на верхушку равна $6{,}7\cdot10^{-4}$ *ат*.

Сила сопротивления воздуха берет на себя заботу не только о равновесии столбика $AБ$ (рис. 3). Так как разность давлений на дно и на верхушку больше, чем перепад давлений, необходимый для равномерного движения столбика $AБ$, то для восстановления равновесия капли часть жидкости должна переместиться из области верхушки ко дну, и верхушка капли должна иметь большую кривизну, чем дно. Дно же из-за большого аэродинамического давления на него должно быть почти плоским. Такую форму и имеют капли на фотографиях.

«СТОПРОЦЕНТНЫЙ ТЕОРЕТИК»

Планк был теоретик насквозь — до смешного. Вернувшийся из Германии Петр Николаевич Лебедев рассказывал, например, своим студентам о том, как Планк проштрафился на коллоквиуме у Августа Кундта. Докладывая о своей работе по термодинамике насыщенных растворов, он вдруг растерялся, замешкался. «Здесь существует... некоторая принципиальная трудность, так как получить насыщенный раствор практически невозможно...» Кундт удивился: «Как так? Я не понимаю». Планк объяснил: «Ведь по мере насыщения скорость растворения становится все меньше, а потому процесс идет к насыщению только ассимптотически, через бесконечно долгое время».— «Ну, этого ждать мне некогда! — ответил Кундт.— Я нагрею раствор, а потом его остужу».— «Да. Действительно, — сконфуженно пробормотал Планк.— Так получить насыщенный раствор... можно».

Но, будучи теоретиком, Планк очень хорошо всегда понимал, какова в физической теории роль эксперимента, факта. Он говорил: «Факты образуют ту архимедову точку опоры, посредством которой самая увесистая теория может быть поднята со своего постамента». Эксперимент и теория тесно слиты. «Прежде чем поставить опыт, его нужно продумать, это значит, надо сформулировать вопрос, обращенный к природе».

Из послесловия Е. М. Кляуса к сборнику статей М. Планка «Единство физической картины мира».

Алиса в Зазеркалье

Климент Дьюрелл

Может ли Природа ввести в заблуждение? Да, может. Истории известны примеры, когда явления и факты, совершенно очевидные и, казалось бы, получившие многократное подтверждение, оказывались неточными или даже неверными. Такие факты можно найти в истории не только физики, но и, например, астрономии. Так, много лет считалась общепризнанной система строения мира с неподвижной Землей в центре.

Природа умеет хитрить. Поэтому физик всегда должен критически относиться и к данным эксперимента, и к своим непосредственным наблюдениям, и, особенно, к фактам, которые кажутся очевидными потому, что подтверждаются нашими ощущениями. Об этом интересно и занимательно рассказал Климент Дьюрелл в своей книге «Азбука теории относительности». В ней популярно излагаются представления теории относительности.

Рассказывать о теории относительности, не прибегая к сложному математическому аппарату, чрезвычайно трудно. «Азбука теории относительности», пожалуй, одна из наиболее удачных попыток такого рода. Математический аппарат изложения соответствует уровню средней школы. Книга написана остроумно и непринужденно.

Главу из этой книги мы предлагаем вашему вниманию. Поводом для разговора в ней служит замечательная сказка английского математика Льюиса Кэрролла «Алиса в Зазеркалье».

«Я не могу поверить этому», — сказала Алиса.

«Не можешь?» — в словах Королевы звучала жалость.

«А ты попробуй еще раз: вдохни поглубже и закрой глаза».

Алиса усмехнулась. «Бесполезно пытаться, — сказала она, — я не могу поверить в невозможное».

«Вероятно, ты мало упражнялась, — ответила Королева. — Когда я была моложе, я ежедневно посвящала этому полчаса. И мне иногда удавалось еще до завтрака поверить в шесть невозможных вещей».

Льюис Кэрролл «Алиса в Зазеркалье»

Может ли Природа ввести в заблуждение?

Ведя с Природой честную игру, ученые в ее лице встречают противника, который не только выбирает подходящие для себя правила игры, но и может, кроме всего прочего, подложить партнеру свинью или обвести его вокруг пальца. Если оказывается, что свойства пространства не укладываются в наши представления, если они искажают масштабы и путают ход наших часов, то существуют ли вообще какие-либо средства, позволяющие установить истину? Можно ли надеяться, что в конце концов многогранные усилия заставят Природу сбросить маску?

Профессор Гарнет, воспользовавшись идеями Льюиса Кэрролла, поучительно проиллюстрировал то, как Природа может вводить нас в заблуждение, причем, по-видимому, без особого риска оказаться разоблаченной.

В конечном счете мы можем полагаться лишь на те данные, которые получаем с помощью наших органов чувств, проверенные и уточненные искусственными приборами, повторными экспериментами и исчерпывающими исследованиями. Наблюдения часто могут быть истолкованы превратно, как в одном анекдоте, рассказанном сэром Джорджем Гринхилом.

В конце учебного года в одном инженерном колледже состоялся прием и осмотр научного отдела. Одна молодая посетительница, войдя в физическую лабораторию и увидев в большом вогнутом зеркале свое перевернутое изображение, наивно заметила своему спутнику: «Они повесили это зеркало вверх ногами». Если бы эта девушка приблизилась к зеркалу, миновав его фокус, то она убедилась бы, что рабочие не были повинны в этом. Если Природа ввела ее в заблуждение, то это была всего-навсего хитрость, которую разоблачил бы последующий опыт.

Выпуклое зеркало

Теперь мы, следуя профессору Гарнету, проследим приключения Алисы в стране за выпуклым зеркалом (в Зазеркалье). Прежде всего следует перечислить некоторые свойства выпуклого зеркала. Читатели, желающие ознакомиться с построениями и доказательствами, которые основаны лишь на рассмотрении подобных треугольников и некоторых элементарных алгебраических формулах, могут обратиться к упражнению 9 на странице 31.

Точка A (рис. 1) — это вершина выпуклого зеркала большого радиуса; O — центр зеркала; отрезок OA — центральный радиус, или ось; средняя точка F отрезка OA является *фокусом* зеркала; PQ — предмет высотой a, расположенный перед зеркалом перпендикулярно оси; $P'Q'$ — его изображение в зеркале. Введем следующие обозначения длин:

$$OF = FA = f,\ FQ' = x,\ Q'A = z,$$
$$AQ = y,\ P'Q' = h.$$

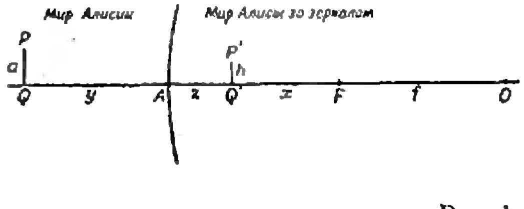


Рис. 1.

Имеют место следующие соотношения:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{f},\quad h=\frac{ax}{f},\quad x=f-z.$$

Легко получить общие следствия, вытекающие из этих формул. Поскольку $1/z=1/y+1/f$, то $1/z>1/y$ и, следовательно, $y>z$. А так как $1/f<1/z$, то $z<f$ или $z<AF$. Поэтому изображение $P'Q'$ всегда оказывается ближе к зеркалу, чем предмет PQ, и никогда не удаляется от зеркала дальше точки F.

Кроме того, поскольку $h=ax/f$, высота изображения будет пропорциональна x — расстоянию от изображения до F. Поэтому, чем ближе $P'Q'$ к F, тем меньше становится отрезок $P'Q'$, т. е. высота изображения.

Жизнь в Зазеркалье

«Он спит сейчас, — сказал Твидлди. — А как ты думаешь, что ему снится?»

«Кто это может угадать?» — ответила Алиса.

«Да ты ему снишься!» — воскликнул Твидлди. — А если бы ты ему перестала сниться, то, как ты думаешь, где бы ты очутилась?»

«Там же, где сейчас, конечно», — ответила Алиса.

«Ничего подобного, — высокомерно возразил Твидлди. — Тебя нигде бы не было: ведь ты только часть его сна!»

«И если Короля разбудят, — добавил Твидлдам, — то ты раз!.. и исчезнешь, как свечка, которую задули».

«Но я же существую реально», — сказала Алиса и принялась плакать.

«От плача ты вовсе не станешь более реальной», — заметил Твидлди *).

Льюис Кэрролл «Алиса в Зазеркалье»

Теперь мы рассмотрим Алису не как сновидение, а как изображение в выпуклом зеркале некой псевдо-Алисы, живущей в нашем собственном мире. Алиса будет настаивать столь же упорно, как в разговоре с Твидлди, что она — свободная, независимо существующая личность. Однако мы увидим со стороны, что ее действия подчинены движениям и прихотям псевдо-Алисы, которую мы станем называть *Алисия*. Мы сравним наши наблюдения (или наблюдения *Алисии*) с тем, каким представляется Алисе ее собственное существование.

*) Твидлди и Твидлдам (по-английски двойники) — персонажи сказки «Алиса в Зазеркалье». — *Прим. перев.*

Алиса в Зазеркалье

Рост *Алисии* равен 4 *фут*, а ширина ее талии 1 *фут*. (1 фут = 0,3048 *м*, 1 дюйм = 2,54 *см*. В одном футе 12 дюймов). Вначале *Алисия* стоит в точке A спиной к зеркалу, так что она и Алиса в точности одинаковы и стоят спиной друг к другу. У *Алисии* есть линейка длиной 1 *фут*, которую она держит у зеркала, так что линейка касается зеркала и совпадает с соответствующей футовой линейкой, которую держит Алиса.

Затем *Алисия* начинает удаляться от зеркала вдоль его оси с постоянной скоростью 1 *фут/сек*. Что произойдет при этом с Алисой?

Предположим, что радиус зеркала равен 40 *фут*, так что $AF=FO=f=20$ *фут*. Далее, рост *Алисии* $a=PQ=4$ *фут*.

Спустя, скажем, 5 *сек*, т. е. при $AQ=y=5$, окажется, что

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{f}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4},$$

$$AQ'=z=4,\text{ а } x=Q'F=f-z=20-4=16,$$

$$P'Q'=h=\frac{ax}{f}=\frac{4\times 16}{20}=\frac{32}{10}=3{,}2\,\textit{фут}.$$

Если в этот момент *Алисия* оглянется, то она обнаружит, что Алиса продвинулась всего на 4 *фут* по сравнению с 5 *фут*, которые прошла она сама, а рост Алисы уменьшился до 3,2 *фут*.

Алисина футовая линейка, которую она держит вертикально, также сократилась; ее длина в действительности составляет теперь

$$1\times x/f=1\times 16/20=0{,}8\ \textit{фут}.$$

Алиса отвергнет мысль, что она стала меньше, и, чтобы убедить *Алисию*, она измерит своей футовой линейкой собственный рост, доказав с торжеством, что она по-прежнему в точности в четыре раза выше своей линейки, т. е. $3{,}2/0{,}8=4$.

Алисия скажет также, что Алиса похудела: ее талия составляет теперь в ширину 0,8 *фут*; действительно, ее ширина совпадает с длиной футовой линейки, но ведь последняя в любом положении, *перпендикулярном* оси, составляет теперь лишь 0,8 *фут*.

Сжатие в направлении, перпендикулярном оси

Мы видим, что по мере удаления от зеркала Алиса все больше сжимается. Коэффициент сжатия в любом направлении, перпендикулярном оси, равен h/a, т. е. x/f, и, следовательно, пропорционален x — расстоянию, на котором Алиса находится от фокуса F.

Ясно, что Алиса не сможет обнаружить это сжатие, так как ее линейка сокращается в той же пропорции, что и ее тело и платье. На самом деле все предметы в мире Алисы независимо от того, из чего они сделаны, ведут себя точно таким же образом. Поэтому мы считаем, что это сжатие есть свойство не вещества, а самого пространства. Оно представляет собой влияние, оказываемое пространством в равной мере на все находящиеся в нем предметы. Поэтому мы говорим, что *одним из законов пространства в мире Алисы является сокращение, происходящее само по себе и в любом направлении, перпендикулярном оси, пропорциональное расстоянию x до фокуса*.

Сжатие в направлении вдоль оси

Затем *Алисия* кладет свою футовую линейку вдоль оси, а Алиса, конечно, делает то же самое.

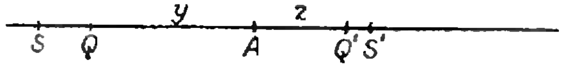


Рис. 2.

Пусть Q и S — два последовательных деления на линейке *Алисии*: тогда $AQ=5$ *фут*, $QS=0{,}1$ *фут*, а $AS=5{,}1$ *фут*. На линейке Алисы соответствующие штрихи обозначены Q' и S' (рис. 2). Мы уже доказали, что если $AQ=y=5$, то $AQ'=z=4$.

Далее, если $AS=y=5{,}1$, то $AS'=z$ дается выражением

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{f}=\frac{1}{5{,}1}+\frac{1}{20}=$$
$$=\frac{20+5{,}1}{5{,}1\times 20}=\frac{25{,}1}{102},$$
$$AS'=z=\frac{102}{25{,}1}\approx 4{,}064.$$
$$Q'S'=AS'-AQ'=0{,}064 \text{ фут}.$$

Коэффициент сжатия в направлении вдоль оси в точке Q' равен

$$\frac{Q'S'}{QS}=\frac{0{,}064}{0{,}1}=0{,}64.$$

Но было показано, что коэффициент сжатия в направлении, перпендикулярном оси, в точке Q' равен 0,8.

Поскольку $(0{,}8)^2=0{,}64$, то мы приходим к выводу, что коэффициент сжатия вдоль оси равен квадрату коэффициента сжатия перпендикулярно оси в той же точке. Доказательство этого утверждения содержится в упражнении 10 на странице 31. Таким образом, согласно наблюдениям *Алисии*, при удалении от зеркала Алиса становится все тоньше, и скорость, с которой она худеет, превышает скорость уменьшения ее роста.

Если Алиса, к примеру, повернется боком и протянет левую руку к зеркалу, а правую от зеркала, то пальцы на ее левой руке окажутся длиннее и толще пальцев на правой руке. Однако общий эффект состоит в том, что пальцы правой руки будут казаться как бы отмороженными, ибо они по сравнению с другой рукой укорачиваются сильнее, нежели утоньшаются.

Геометрия в мире Алисы

По мере того как *Алисия* равномерно удаляется от зеркала, делая шаги одинаковой длины, Алиса также

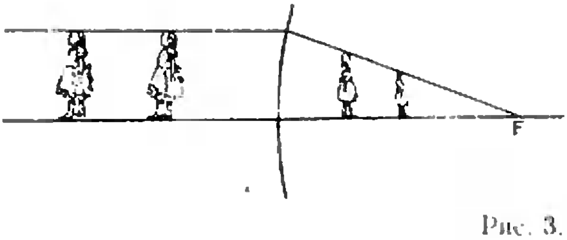


Рис. 3.

удаляется в противоположном направлении. При этом (по мнению *Алисии*) шаги Алисы становятся все короче и короче, так что она движется все более и более медленно. И действительно, ведь как бы далеко ни ушла *Алисия*, Алиса никогда не сможет продвинуться за точку F (рис. 3). Конечно, Алисе кажется, что расстояние, на которое она может удаляться, неограниченно, и то, что *Алисия* называет точкой F, по словам Алисы, является точкой на бесконечности. Если Алиса движется на уровне земли, то ей кажется, что ее макушка и подошвы перемещаются по параллельным линиям. Эти линии, естественно, отражают представление Алисы о параллелизме. *Алисия* же видит, что эти линии в действительности сливаются в точке F. Если бы Алиса проложила вдоль оси железнодорожные рельсы, то они вели бы себя точно таким же образом.

Представим себе, что *Алисия* едет на велосипеде вдоль оси в направлении от зеркала. Что будет при этом происходить с колесами велосипеда Алисы (рис. 4)?

Сжатие вдоль оси оказывается больше, чем в перпендикулярном направлении. Следовательно, колеса велосипеда Алисы будут не только меньше, чем у машины *Алисии*, но, кроме того, переднее колесо окажется меньше заднего. И, более того, каждое колесо примет приблизительно эллиптическую форму, причем вертикальный диаметр будет больше горизонтального. Хотя колеса вращаются, вертикальные спицы всегда будут казаться самыми длинными, а горизонтальные — самыми короткими. Спицы как бы удлиняются при повороте из горизонтального в вертикальное положение, а затем при повороте из вертикального в горизонтальное сокращаются.

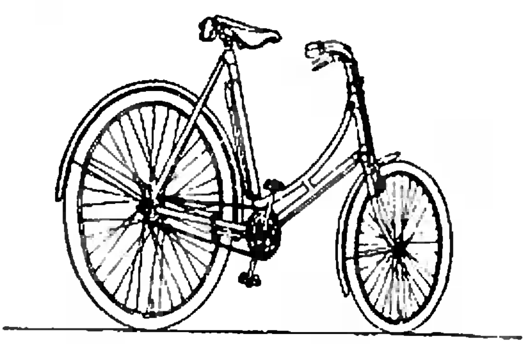


Рис. 4.

Сама Алиса, проведя тщательные измерения, убедится, что ее машина вполне нормальная, однако *Алисия* будет думать совсем иначе.

Детские забавы

Мы не собираемся утверждать, что живем в мире за зеркалом, а хотели бы лишь указать, что, по-видимому, не существует метода, который позволил бы нам обнаружить это обстоятельство, если бы в действительности так оно и было. Устанавливая свои законы пространства, Природа при желании может сковать своими чарами его обитателей. Но тем не менее остается фактом, что Природе приходится отвечать на некоторые практические вопросы, задаваемые ей учеными. А это вселяет в них надежду, что законы пространства и времени в конце концов будут раскрыты. Если из всего сказанного читатель поймет, что поиски истины отнюдь не просты, а результаты этих поисков могут оказаться неожиданными, то это и будет означать, что данная глава отвечает своей цели.

Упражнения *)

1. Показать, что, когда *Алисия* отойдет от зеркала на 10 *фут*, Алиса продвинется лишь на 6 *фут* 8 *дюйм*, причем ее рост будет 2 *фут* 8 *дюйм*, а ширина 8 *дюйм*. Каким окажется рост Алисы, когда она измерит себя собственной футовой линейкой?

2. Показать, что, когда *Алисия* отойдет от зеркала на 20 *фут*, Алиса продвинется лишь на 10 *фут*. Какими будут рост и ширина талии Алисы в этом положении?

3. Где будет находиться *Алисия* в тот момент, когда рост Алисы уменьшится до 1 *фут*? Какова будет при этом ширина талии

*) Предполагается, что рост *Алисии* равен 4 *фут*, а ее талия достигает 1 *фут* в ширину и 6 *дюйм* в толщину; кроме того, $f = 20$ *фут*. (Напомним, что 1 *фут* = 12 *дюйм*. — *Прим. перев.*)

Алисы? Чему будет равна длина ее футовой линейки в вертикальном положении? Сколько таких линеек уложится в росте Алисы?

4. Какой будет толщина талии Алисы в упражнении 1? Какую величину получит в результате своего измерения Алиса?

5. Каким будет коэффициент сжатия Алисы в упражнении 2? Как связаны коэффициенты сжатия вдоль и поперек оси?

6. *Алисия*, находясь в 20 *фут* от зеркала, держит в руках дюймовый кубик, ребра которого параллельны и перпендикулярны оси. Какой предмет будет в руках у Алисы?

7. Чему будут равны поперечные размеры Алисы, когда ее рост уменьшится до 1 *фут*?

8. Меняется ли по мере удаления от зеркала, подобно размерам, и внешний вид Алисы? Когда ее рост уменьшился до 1 *фут*, была изготовлена скульптура Алисы в масштабе 4:1. Будет ли эта скульптура похожа на живую Алису?

9. BAC — выпуклое зеркало, радиус которого AO значительно больше высоты предмета PQ. Световой луч, идущий из точки P параллельно оси, падает на зеркало в точке N и затем отражается в направлении, соединяющем эту точку с фокусом F. Зеркало не меняет направления луча, идущего из точки P к центру зеркала O. Таким образом, изображение точки P будет расположено в точке P' на пересечении NF и PO. Проведем линию $P'Q'$ перпендикулярно OA. Тогда $P'Q'$ окажется изображением PQ. Фокус F является средней точкой отрезка OA. Поскольку радиус зеркала велик, то его кривизна мала и NA можно рассматривать как перпендикуляр к OA (рис. 5).

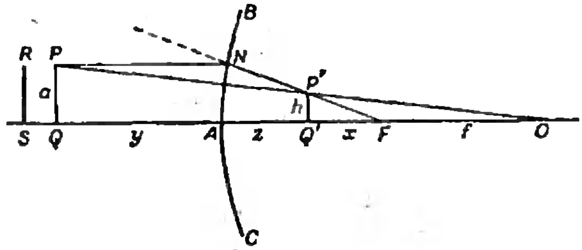


Рис. 5.

а) Доказать, что

$$\frac{FO}{PN}=\frac{FP'}{P'N}=\frac{FQ'}{Q'A}.$$

б) Используя обозначения, приведенные на странице 27, доказать, что $1/z=(1/y)+(1/f)$.

в) Доказать, что $P'Q'/NA=Q'F/AF$, а затем доказать, что $h=ax/f$.

г) Показать, что $x=f-z=fz/y$ и $z/y=x/f$.

10. Пусть отрезок PQ на рисунке 5 перемещается в положение RS, а $R'S'$ есть изображение RS, и пусть $AS=y_1$, $AS'=z_1$. Используя формулу $1/z=(1/y)+(1/f)$ и тот факт, что расстояние между RS и PQ мало, доказать, что

$$\frac{Q'S'}{QS}=\frac{z_1-z}{y_1-y}=\frac{zz_1}{yy_1}\approx\frac{z^2}{y^2}=\frac{x^2}{f^2}=\left(\frac{h}{a}\right)^2.$$

Какова величина продольного коэффициента сжатия? Читатель с достаточной подготовкой должен показать, что $\delta z/z^2=\delta y/y^2$, и дать интерпретацию результата.

11. Каким представляется *Алисии* движение стрелок часов Алисы, если: а) часы повернуты к зеркалу, б) часы лежат горизонтально на полу?

12. Алиса вращает волчок, причем ось волчка вертикальна. Что необычного происходит при этом с точки зрения *Алисии*?

13. Ось зеркала в направлении от A к O ориентирована на восток. Алиса, рост которой уменьшился вдвое по сравнению с ростом *Алисии*, поворачивается и идет на северо-восток. Каким будет направление ее движения с точки зрения *Алисии*?

14. Алиса считает, что она доказала подобие двух треугольников с помощью наложения. Согласится ли с ней *Алисия*?

«Квант» — научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР. Он рассчитан в первую очередь на школьников 8—10 классов. Среди его читателей немало учителей, особенно тех, которые ведут кружки или факультативные занятия по физике и математике, а также студентов педагогических институтов. С интересом читают его и любители физики и математики более старшего возраста.

«Квант» публикует статьи и заметки, посвященные современным проблемам науки, а также много различных материалов, расширяющих и углубляющих школьные курсы физики и математики.

В нем содержится богатая информация для тех, кто готовится к поступлению в институты.

Постоянные разделы журнала — «Задачник Кванта», «Лаборатория Кванта», «Практикум абитуриента» — содержат много интересных задач и домашних экспериментов.

«Квант» представляет своим читателям регулярную информацию о новых книгах, о работе физико-математических школ и кружков.

Среди наших авторов — известные советские и иностранные ученые, молодые научные работники, педагоги. С сообщениями о своих первых открытиях, лабораторных работах или самостоятельно сконструированных приборах на страницах нашего журнала могут выступать и школьники.

Подписка начинается с 1 сентября. Цена номера 30 копеек. Стоимость годовой подписки 3 рубля 60 копеек. Подписной индекс 70465.

Об одном индуктивном методе доказательства неравенств

С. Т. Берколайко,
С. Б. Каток

Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом, утверждающая, что при любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

относится к числу тех математических фактов, доказательства которых существенно менее известны, чем их формулировки. (Другие примеры такого рода: в арифметике — единственность разложения числа на простые множители, в геометрии — теорема о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.) Между тем существует очень много различных способов доказательства этого замечательного неравенства, в том числе и элементарных (например, в [1] (решение задачи 268) приведено 3 элементарных доказательства, а в начале [5] предлагается 12 разных доказательств). В этой заметке приводится еще одно короткое доказательство по индукции, которое проходит и для других похожих неравенств.

Мы должны доказать, что

$$x_1+\ldots+x_n\geqslant n(x_1\ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \qquad (1)$$

для всех целых $n\geqslant 2$ и положительных $x_1, \ldots, x_n$.

Для $n=2$ это неравенство выглядит так:

$$x_1+x_2\geqslant 2(x_1x_2)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

и сразу следует из очевидного неравенства

$$(x_1^{\frac{1}{2}}-x_2^{\frac{1}{2}})^2\geqslant 0.$$

Предположим, что для $n=k$ неравенство (1) верно, и докажем его для $n=k+1$.

Для этого рассмотрим такое выражение:

$$x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}+(k-1)(x_1x_2\ldots x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}.$$

Разобьем эту сумму на две, по k слагаемых, и оценим каждую из них, применяя неравенство (1) для $n=k$:

$$x_1+x_2+\ldots+x_k\geqslant k(x_1\ldots x_k)^{\frac{1}{k}},$$

$$x_{k+1}+(k-1)(x_1\ldots x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}\geqslant k\left(x_{k+1}x_1^{\frac{k-1}{k+1}}\ldots x_{k+1}^{\frac{k-1}{k+1}}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Мы рассматриваем $(k-1)(x_1x_2\ldots x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}$ как сумму $(k-1)$ одинаковых слагаемых $(x_1x_2\ldots x_{k+1})^{\frac{1}{1+k}}$.

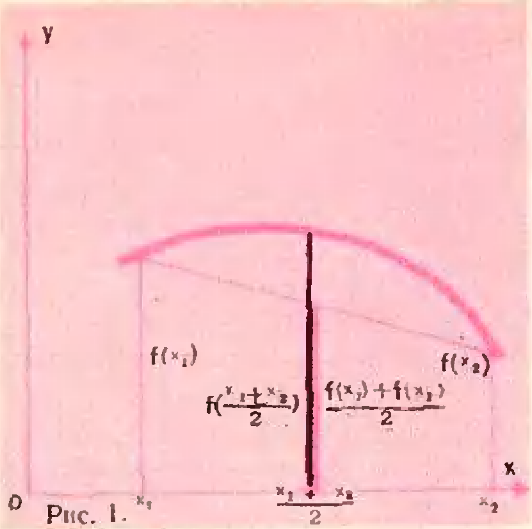


Рис. 1.

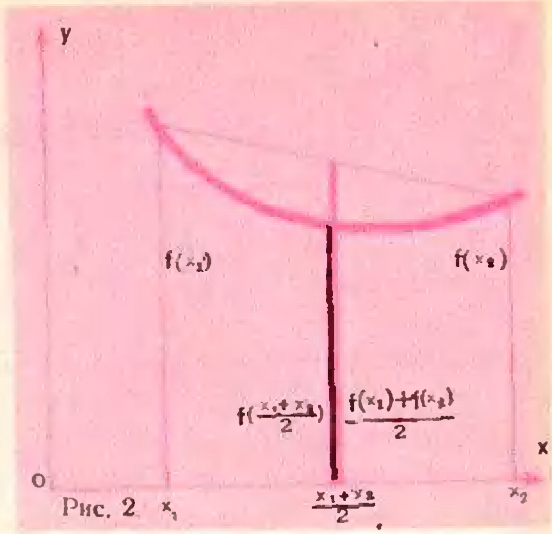


Рис. 2

Применяя неравенство (2) к правым частям двух полученных выше неравенств, получаем

$$k\,(x_1\ldots x_k)^{\frac{1}{k}} + k\,\Bigl(x_{k+1}x_1^{\frac{k-1}{k+1}}\ldots x_{k+1}^{\frac{k-1}{k+1}}\Bigr)^{\frac{1}{k}} \geqslant 2k\,(x_1\ldots x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}},$$

откуда

$$x_1+x_2+\ldots+x_{k+1} \geqslant (k+1)(x_1x_2\ldots x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}.$$

Чтобы «прочувствовать» это алгебраическое преобразование, посмотрим, как оно выглядит для $n=3$:

$$x_1+x_2+x_3+(x_1x_2x_2)^{\frac13} \geqslant 2\,(x_1x_2)^{\frac12}+2\,\bigl(x_1^{\frac13}x_2^{\frac13}x_3^{\frac43}\bigr)^{\frac12} \geqslant$$

$$\geqslant 2\cdot 2\,\Bigl[(x_1x_2)^{\frac12}\,\bigl(x_1^{\frac13}x_2^{\frac13}x_3^{\frac43}\bigr)^{\frac12}\Bigr]^{\frac12} \geqslant 4\,(x_1x_2x_3)^{\frac13},$$

откуда $x_1+x_2+x_3 \geqslant 3(x_1x_2x_3)^{\frac13}$. Здесь трижды использовалось неравенство (2).

Примерно таким же способом можно доказать следующие неравенства:

а) $a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p \geqslant n\left(\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^p$,

где n и p — натуральные числа, $a_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$;

б) $\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_n \leqslant n\sin\left(\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}\right)$,

где $0<\alpha_i<\dfrac{\pi}{2}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$;

в) $\sin\alpha_1\sin\alpha_2\ldots\sin\alpha_n \leqslant \sin^n\left(\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}\right)$,

где $0<\alpha_i<\dfrac{\pi}{2}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$;

г) $\dfrac{1}{a_1^p}+\dfrac{1}{a_2^p}+\ldots+\dfrac{1}{a_n^p} \geqslant \dfrac{n}{\left(\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^p}$,

где p и n — натуральные числа, $a_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$;

д) $(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n) \geqslant \left(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}\right)^n$,

где $a_i>0$, $b_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Приведенный выше способ доказательства удобен тем, что он позволяет доказать все эти (и многие подобные им) неравенства сразу, т. е. доказать теорему, из которой все эти неравенства следуют как частные случаи. К формулировке этой общей теоремы мы и перейдем.

Назовем функцию f, заданную на отрезке $[a, b]$ числовой оси, *выпуклой вверх* (рис. 1), если для любых x_1, x_2 из этого отрезка

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \tag{3}$$

Геометрически это означает, что если соединить любые две точки графика хордой, то середина этой хорды будет лежать н и ж е графика.

Точно так же определяется свойство функции быть *выпуклой вниз* (рис. 2), с той разницей, что неравенство (3) заменяется на противоположное:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geqslant f\,\frac{(x_1+x_2)}{2}. \tag{4}$$

Например, известная вам функция $f(x)=x^2$ выпукла вниз на всей оси; неравенство (4) для нее выглядит так:

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{2} \geqslant \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.$$

Проверьте, что оно выполняется при любых x_1, x_2.

Т е о р е м а. *Если функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, выпукла вверх, то*

$$\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \leqslant f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \tag{5}$$

для любых точек $x_1, \ldots, x_n$, лежащих на отрезке $[a, b]$.

Доказательство будем проводить по индукции. Заметим, что утверждение теоремы для $n=2$ просто повторяет наше определение выпуклой функции. Значит, остается доказать неравенство (5) для $n=k+1$, предположив, что для $n=k$ оно уже доказано. Тогда

$$f(x_1)+\ldots+f(x_k)+f(x_{k+1})+(k-1)\,f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right)=[f(x_1)+\ldots+f(x_k)]+$$
$$+\left[f(x_{k+1})+(k-1)\,f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right)\right]\leqslant kf\left(\frac{x_1+\ldots+x_k}{k}\right)+$$
$$+kf\left(\frac{x_{k+1}}{k}+\frac{(x_1+\ldots+x_{k+1})(k-1)}{(k+1)\,k}\right)\leqslant 2kf\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+\ldots+x_{k+1}}{k}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(x_1+\ldots+x_{k+1})(k-1)}{(k+1)\,k}\right)\right]=2kf\left(\frac{x_1+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right),$$

откуда получаем требуемое неравенство для $n=k+1$. Здесь мы применили два раза неравенство (5) для $n=k$ и один раз неравенство (5) для $n=2$, т. е. использовали определение выпуклости.

Вы, конечно, заметили, что это доказательство очень похоже на приведенное выше доказательство теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Чтобы доказать неравенства а) — д) с помощью этой теоремы, надо для каждого из них придумать такую функцию, чтобы неравенство (5) в применении к этой функции совпадало с доказываемым неравенством или получалось из него простым преобразованием. После этого остается только проверить выполнение условий теоремы, т. е. доказать выпуклость найденной функции на соответствующем отрезке (конечном или бесконечном), другими словами, доказать нужное неравенство только для $n=2$.

А если доказать выпуклость вверх функции $\lg x$ (что сводится к доказательству неравенства (2)), то из нашей теоремы, как один из частных случаев, получится теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом *):

$$\lg\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{\lg x_1+\ldots+\lg x_n}{n},$$

т. е.

$$\lg\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\leqslant\lg\,(x_1\ldots x_n)^{\frac{1}{n}},\qquad \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\leqslant(x_1\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

В заключение мы приведем список книг, в которых можно прочитать другие доказательства теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

[1] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. I, М., «Наука», 1965.

Обратите внимание на первое из трех приведенных в этой книге доказательств («Обратной индукцией»).

[2] Кречмар, Задачник по алгебре. М., «Наука», 1968.

[3] Э. Беккенбах и Р. Беллман, Введение в неравенства, М., «Мир», 1965.

[4] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, 1948.

[5] Э. Беккенбах и Р. Беллман, Неравенства, М., «Мир», 1965.

Упражнения

1. Какое неравенство получится, если применить теорему к функции $y=x^2$? Попробуйте доказать это неравенство непосредственно.

2. Выведите из общей теоремы неравенства а)—д). Выпуклость каких функций надо для этого доказывать?

3. Придумайте еще несколько примеров выпуклых функций и запишите неравенство, которое получится из теоремы 1 в применении к этим функциям.

4. Функция f определена на отрезке $[a, b]$ и имеет обратную**) функцию g. Докажите, что если f выпукла вверх, то g выпукла вниз, и наоборот.

5. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, выпукла вверх. Докажите, что для любых точек $x_1, \ldots, x_n$, лежащих на отрезке $[a, b]$, и любых положительных $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1f(x_1)+\ldots+a_nf(x_n)}{a_1+\ldots+a_n}\leqslant f\left(\frac{(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)}{a_1+\ldots+a_n}\right).$$

(Заметим, что эта задача является обобщением доказанной ранее теоремы, которая получается при $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.)

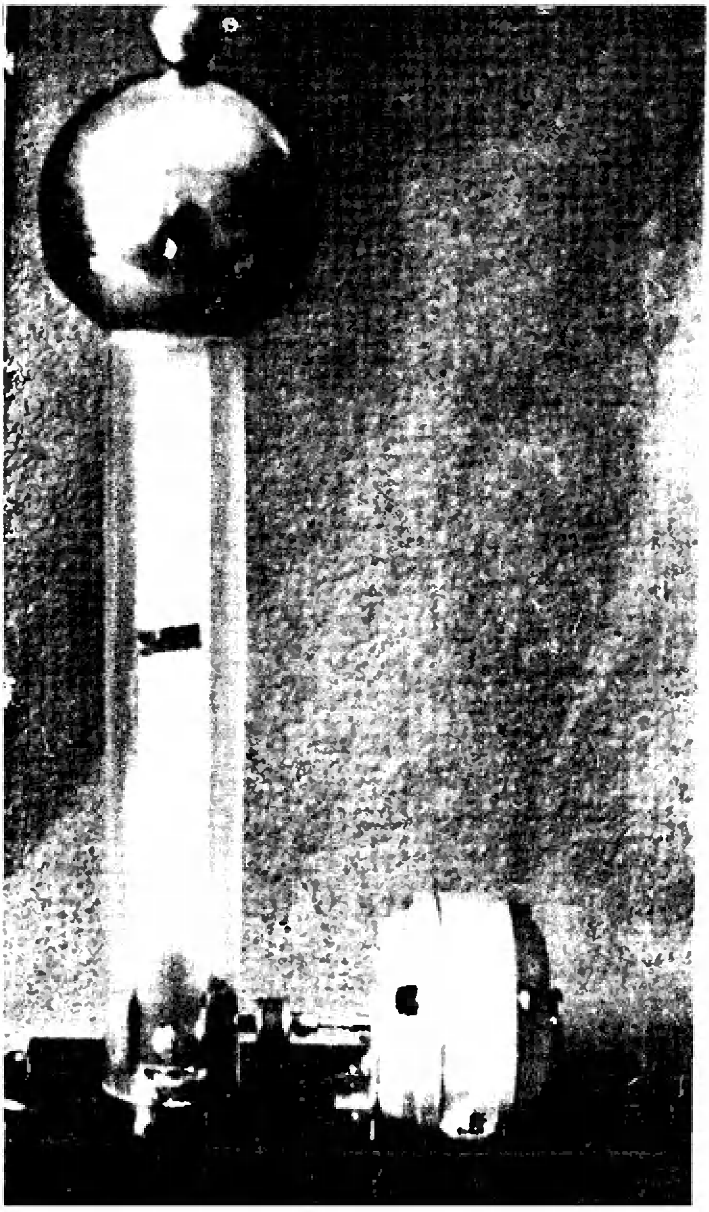
Указание. Для решения этой задачи можно использовать тот же прием, который применялся нами при доказательстве теоремы.

*) Можно взять логарифм по любому основанию, большему единицы.

**) См. «Квант», № 1, стр. 22.

КАК СДЕЛАТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР

С. А. Хорошавин



Если внутрь полой металлической сферы внести заряженный шарик на ручке, сделанной из изолирующего материала, и прикоснуться шариком к внутренней поверхности сферы, то он отдаст сфере свой заряд. Повторяя эту операцию много раз, можно сообщить сфере достаточно большой заряд.

Конечно, потребовалось бы много времени и труда, чтобы подобным образом зарядить сферу до высокого потенциала. Но можно поступить иначе — устроить транспортер электрических зарядов, например в виде ленты, склеенной в кольцо. Лента движется. В одном месте она получает электрические заряды, а в другом — отдает их сфере.

Такой электростатический генератор был построен в 1931 году Ван-де-Граафом. Он устроен следующим образом (рис. 1). Между двумя роликами *1* и *2* натянута склеенная в кольцо лента *3*. Она движется и от трения о щетку *4* заряжается. Электрические заряды вместе с лентой перемещаются вверх и попадают внутрь большого металлического шара *5*. Здесь лента касается щетки *6*. Электрические заряды всегда размещаются на поверхности проводника. Поэтому заряды с ленты по щетке переходят на поверхность шара. Лента движется непрерывно, и поэтому количество зарядов на поверхности шарового электрода возрастает.

В 1936 году в Физико-техническом институте АН УССР в Харькове был построен такой электростатический генератор. На опорной колонне высотой 10 *м* был установлен шаровой электрод диаметром 10 *м*. Десять ленточных транспортеров заряжали шаровой электрод до потенциала в 4 миллиона вольт. Электрическое поле, создаваемое этим генератором, использовалось для ускорения заряженных частиц, которыми бомбардировались атомные ядра.

Действующую модель электростатического генератора высокого напряжения вы можете построить сами. Например, такую, какую построили мы в нашем школьном физическом кружке (см. фото на стр. 37). Эта модель позволяет получать напряжение до 80 тысяч вольт, а устроена она следующим образом.

На основании *1* укрепляется обойма *2* (рис. 2). Обойма предназначена для крепления опорной колонны *3* и нижнего ролика *4*. Опорная колонна свертывается из листового органического стекла. У нас она имеет наружный диаметр 50 *мм* и высоту 370 *мм*. В обойме *2* на оси вращается ролик *4* диаметром 17 *мм* и шириной 26 *мм*. Чтобы лента не сползала с ролика, он имеет невысокие бортики. Так же устроен и верхний ролик *5*. Расстояние между роликами 320 *мм*. На ролики надето кольцо из капроновой ленты *6* шириной 23 *мм*. Чтобы соединить концы капроновой ленты, их надо сложить вместе и сварить разогретым паяльником.

Ось верхнего ролика можно укрепить прямо на опорной колонне. Но лучше предусмотреть устройство *7*, которое позволило бы перемещать ось верхнего ролика вдоль колонны, добиваясь тем самым нужного натяжения ленты.

В нашей модели заряды на ленте появляются вследствие трения капроновой ленты о полистироловую пластинку *8*. Она прижимается к ленте плоской пружиной. В верхней части колонны укреплена латунная щетка *9*, которая касается ленты и соединена с шаровым кондуктором *10*. Он имеет диаметр 100 *мм*. Шаровой кондуктор мы взяли из школьного набора по электростатике. Если надеть шар на колонну (он имеет отверстие диаметром 50 *мм*), то верхний ролик и щет-

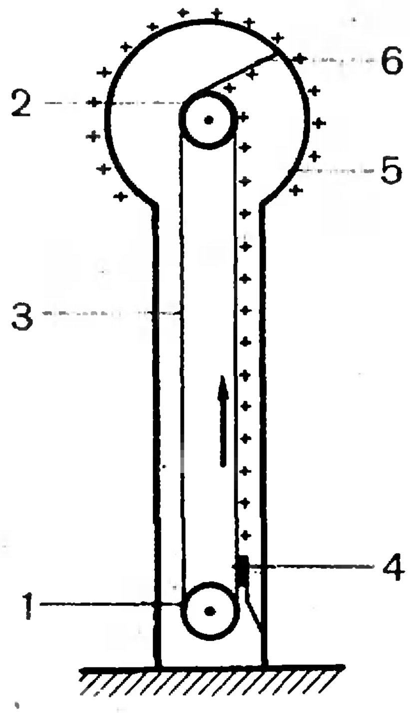


Рис. 1. Принципиальная схема электростатического генератора.

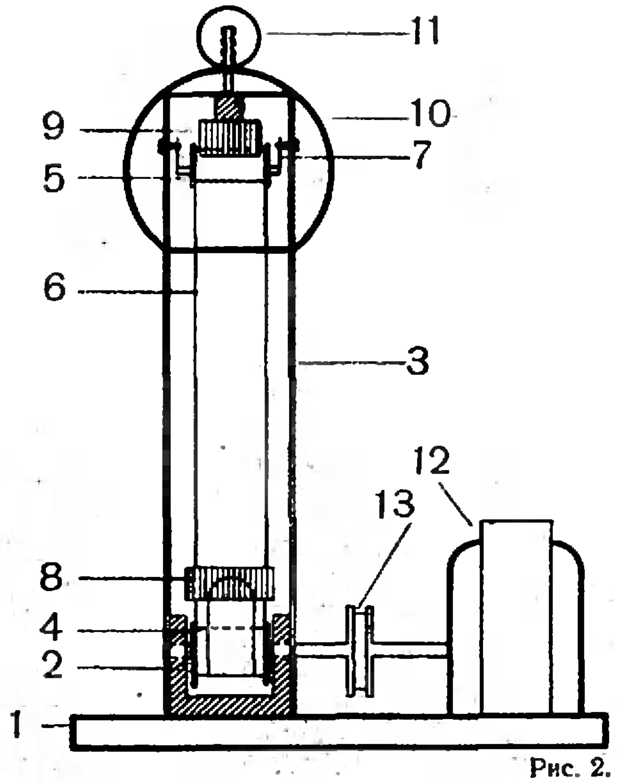


Рис. 2.

ка *9* окажутся внутри шара. Шар-электрод болтом соединяется со щеткой и закрепляется шариком *11*, который имеет отверстие с резьбой.

Нижний ролик, а значит и ленту, можно вращать рукой. Но мы использовали асинхронный однофазный электродвигатель от электропроигрывателя *12* и соединили его с нижним роликом муфтой *13*.

Включен электродвигатель, лента побежала по роликам. По пути от трения о щетку *8* она наэлектризовалась и понесла электрические заряды на шаровой кондуктор. Чем дольше будет вращаться лента, тем выше будет потенциал шара. Но здесь есть предел. Дело в том, что при высокой напряженности электрического поля вблизи шара воздух становится электропроводным, и заряды с шара начинают стекать. Потенциал шара перестает расти.

Можно подсчитать, до какого потенциала мы можем зарядить шар. Напряженность поля на поверхности шара высчитывается по формуле $E=\frac{V}{R}$, где V — потенциал шара, а R — его радиус. Если $R = 5$ *см*, а E для воздуха при атмосферном давлении равно 30 *кв/см*, то, значит, шар можно зарядить до 150 тысяч вольт.

Этот расчет верен только для идеального гладкого шара, удаленного очень далеко от всех других проводящих предметов. Поэтому напряжение, создаваемое нашим генератором, будет ниже расчетного.

Если вам удастся изготовить шар больших размеров, то и зарядить вы его сможете до более высокого потенциала. Надо только иметь в виду, что шар должен быть очень гладким и ровным.

А теперь проделайте несколько опытов с моделью.

Прежде всего, определите знак заряда шара. Как это сделать, понятно. Надо только помнить, что эбонитовая палочка, потертая о мех, электризуется отрицательно, а стеклянная палочка, потертая о шелк,— положительно.

Определите, сколько полных оборотов должна сделать лента, чтобы высоковольтный электрод полностью зарядился. Для этого нанесите на ленту хорошо видимую метку и сосчитайте, сколько полных оборотов сделает лента, пока потенциал электрода не возрастет до максимального значения. Учтите, что «производительность генератора» существенно зависит от положения верхней щетки.

Если щетку расположить так, что она будет находиться близко к тому месту, где лента входит в шар, то заряды с ленты будут сниматься не полностью, и надо будет долго ждать, пока высоковольтный электрод зарядится. Меняя положение верхней щетки, найдите такое, при котором высоковольтный электрод будет заряжаться полностью при минимальном числе оборотов ленты.

В нашей модели использована капроновая лента. А Ван-де-Грааф применял шелковую. В электростатическом генераторе Харьковского института зарядная лента была изготовлена из прорезиненной ткани. Попробуйте и вы изготовить зарядную ленту из другого материала.

У нас зарядная щетка изготовлена из пластинки полистирола, но можно сделать ее и из органического стекла и из меди. Если вы будете пользоваться металлической щеткой, то заземлите ее. Генератор станет работать лучше. Почему?

Не отчаивайтесь, если на первых порах вас постигнет неудача. Помните, что даже самые лучшие существующие электростатические генераторы позволяют получать напряжение, составляющее лишь треть от расчетного. Все причины этого еще не выяснены. Так что здесь есть над чем подумать и что изобретать.

Тем, кто захочет больше узнать об электростатических генераторах, мы рекомендуем прочитать книгу «Электростатические ускорители заряженных частиц», Госатомиздат, 1963 г.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

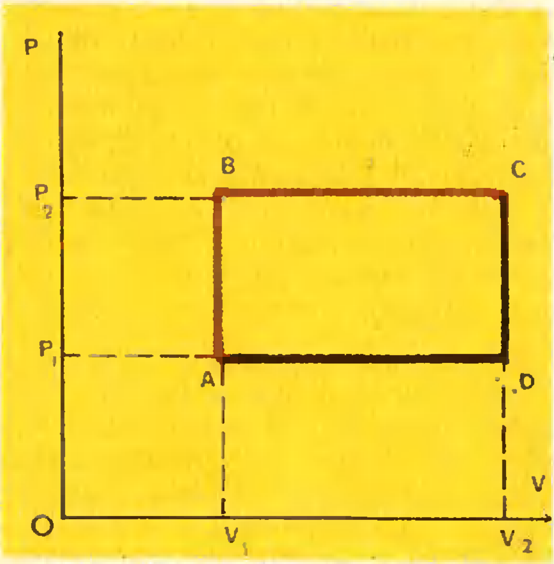


Рис. 1.

Ф42. Канат перекинут через блок, причем часть каната лежит на столе, а часть — на полу. После того как канат отпустили, он начал двигаться. Найти скорость установившегося равномерного движения каната. Высота стола равна h.

Ф43. Найти давление в центре жидкой планеты радиуса R, если жидкость несжимаема и имеет плотность ρ.

Всесоюзная физическая олимпиада, 1969 г.

Ф44. Два дельфина плывут навстречу друг другу. Один из них издает звук частоты ω. Какой частоты звук слышит другой дельфин, если скорости дельфинов относительно воды одинаковы и равны v? Скорость звука в воде u.

Всесоюзная физическая олимпиада, 1968 г.

Ф45. Сферический конденсатор, заполненный диэлектриком и заряженный до некоторой разности потенциалов, разряжается через свой диэлектрик. Каким будет магнитное поле токов разряда в пространстве между сферами?

Ф46. На мячик с высоты 1 *м* падает кубик, подскакивающий затем почти на 1 *м*. На какую высоту подскакивает мячик? На какую высоту подскочит мячик, если на него с высоты 1 *м* упадет точно такой же мячик?

Г. Л. Коткин

Ф47. Если над идеальным газом совершается процесс ABC (рис. 1), то ему сообщается количество тепла Q. Какое количество тепла сообщается газу при процессе ADC?

Московская городская физическая олимпиада, 1970 г.

М36. Докажите, что на плоскости нельзя расположить семь прямых и семь точек так, чтобы через каждую из точек проходили три прямые и на каждой прямой лежали три точки.

М37. В каждую клетку бесконечного листа клетчатой бумаги вписано некоторое число так, что сумма чисел в любом квадрате (стороны которого идут по линиям сетки) по модулю не превосходит единицы. Докажите, что тогда существует такое число c, что сумма чисел в любом прямоугольнике (стороны которого идут по линиям сетки) не больше c; другими словами, что суммы чисел во всех прямоугольниках ограничены. Докажите, что можно взять $c=4$. Может быть, вам удастся улучшить эту оценку (например, доказать, что наше утверждение верно для $c=3$ или даже для $c=2$)?

Ю. И. Ионин

М38. Окружность, построенная на высоте AD прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает катет AB в точке K, а катет AC — в точке M. Отрезок KM пересекает высоту AD в точке L. Известно, что отрезки AK, AL и AM составляют геометрическую прогрессию (т. е. $AK/AL=AL/AM$). Найдите острые углы треугольника ABC (рис. 2).

Л. М. Лоповок

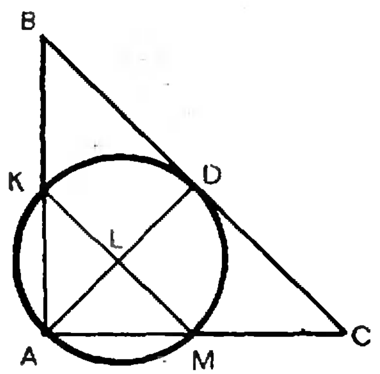


Рис. 2.

М39. Докажите, что целые неотрицательные числа x, y удовлетворяют уравнению

$$x^2-mxy+y^2=1$$

(где m — данное целое число, большее единицы) тогда и только тогда, когда x и y — соседние члены последовательности

$$\varphi_0=0,\quad \varphi_1=1,\quad \varphi_2=m,$$
$$\varphi_3=m^2-1,\quad \varphi_4=m^3-2m,$$
$$\varphi_5=m^4-3m^2+1,\quad \ldots,$$

в которой $\varphi_{k+1}=m\varphi_k-\varphi_{k-1}$ для всех $k\geqslant 1$.

Например, все решения уравнения $x^2-3xy+y^2=1$ в целых числах $0\leqslant x<y$ — это пары (0, 1); (1, 3); (3, 8); (8, 21) соседних членов последовательности 0, 1, 3, 8, 21, 55, ... определяемой условиями $\varphi_0=0$, $\varphi_1=1$, $\varphi_{k+1}=3\varphi_k-\varphi_{k-1}$ для всех $k\geqslant 1$. (Этот красивый факт был использован в работе Ю. Матиясевича, посвященной 10-й проблеме Гильберта, о которой рассказывалось в предыдущем номере «Кванта».)

М40. Найдите сумму

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots$$
$$\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1.$$

Попробуйте решить следующую, более общую задачу: найти сумму

$$S_{n,k}=[1\cdot 2\ \ldots\ k]\times$$
$$\times[n(n-1)\ldots(n-k+1)]+$$
$$+[2\cdot 3\ \ldots\ (k+1)]\times$$
$$\times[(n-1)(n-2)\ldots(n-k)]+$$
$$+[3\cdot 4\ \ldots\ (k+2)]\times$$
$$\times[(n-2)(n-1)\ldots(n-k-1)]+\ldots$$
$$\ldots+[(n-k)(n-k+1)\ldots(n-1)]\times$$
$$\times[(k+1)k\ \ldots\ 2]+$$
$$+[(n-k+1)(n-k+2)\ \ldots\ n]\times$$
$$\times[k(k-1)\ \ldots\ 1].$$

В. Н. Березин

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧНИКА КВАНТА

Продолжаем публикацию решений «Задачника Кванта».

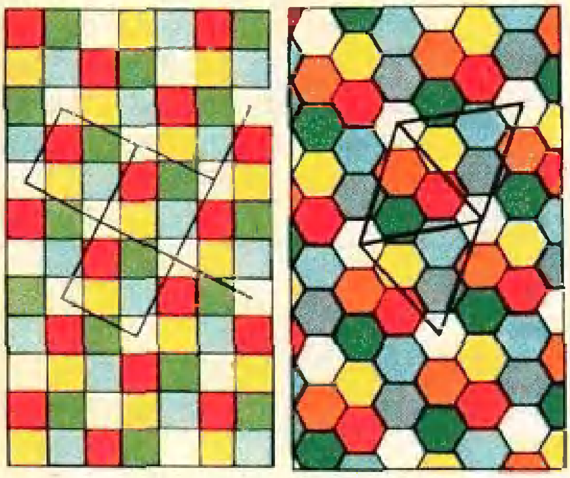


Рис. 1, *а*, *б*.

М3. (а) На рисунке 1, *а* плоскость покрыта квадратами пяти цветов. Центры квадратов одного и того же цвета расположены в вершинах квадратной сетки. При каком числе цветов возможно аналогичное заполнение плоскости?

(б) На рисунке 1, *б* плоскость покрыта шестиугольниками семи цветов так, что центры шестиугольников одного и того же цвета образуют вершины решетки из одинаковых правильных треугольников. При каком числе цветов возможно аналогичное построение?

Примечание. В первой задаче число цветов может равняться единице (все квадраты одного цвета) и двум (как на шахматной доске). Во второй задаче вы без труда найдете решения с одним цветом и с тремя цветами. Желательно дать полное решение задач, т. е. описать все раскраски, удовлетворяющие указанным условиям. Присылайте, однако, и неполные решения, если они покажутся вам интересными. Подумайте, например, существует ли во второй задаче решение с тринадцатью цветами?

Решение*)

Теперь будем считать правильным только такое заполнение плоскости квадратами (или шестиугольниками), при котором сетка, соответствующая какому-то одному цвету, имеет такие же размеры и направления сторон квадратов (или треугольников), как и сетка, соответствующая любому другому цвету. Иначе говоря, все сетки должны получаться друг из друга параллельным сдвигом. Разумеется, разные сетки не могут быть закрашены одним цветом. Решение задачи для обоих случаев (квадраты и шестиугольники) аналогично, и мы рассмотрим оба случая сразу.

I. Докажем сначала, что если плоскость заполнена указанным образом, то число цветов равно k^2+l^2 в случае квадратов и k^2+kl+l^2 в случае шестиугольников, где k, l — целые неотрицательные числа (но не равные нулю одновременно)**).

---

*) Начало решения этой задачи смотри в «Кванте» № 7, стр. 54.

**) Существуют и другие формулы, представляющие те же самые множества чисел, например, k^2-kl+l^2 для шестиугольников.

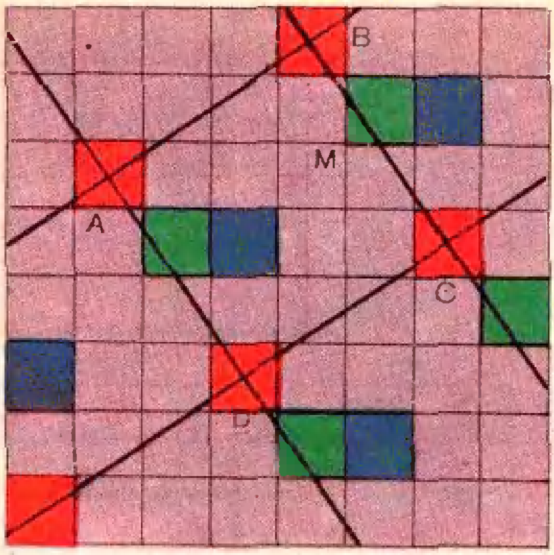


Рис. 2.

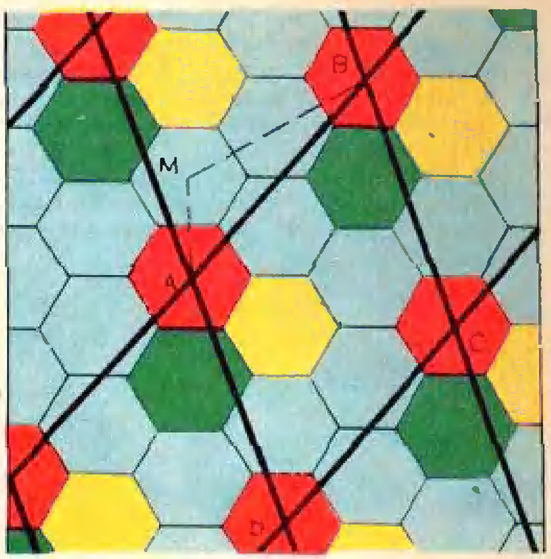


Рис. 3.

Примем за единицу длины расстояние между центрами двух соседних квадратов или шестиугольников.

Начертим жирными черными линиями сетку, проходящую через центры квадратов или шестиугольников одного цвета, скажем, красного (рис. 2, 3). В случае шестиугольников мы проведем линии только двух направлений, так что сетка будет состоять не из правильных треугольников, а из ромбов.

Пусть $ABCD$ — один квадрат или один ромб сетки. Выведем формулу для его площади.

В случае квадрата проведем через точки A и B прямые, параллельные сторонам окрашенных квадратиков и точку их пересечения обозначим M. Длины $AM=k$ и $BM=l$ — целые числа (одно из них может быть равно нулю). На рисунке 1 $k=3$, $l=2$. Тогда $AB=\sqrt{k^2+l^2}$, а площадь $ABCD$ равна k^2+l^2.

В случае ромба проведем через точки A и B прямые, параллельные апофемам шестиугольников, и точку их пересечения обозначим M. Угол AMB может оказаться равным 120° или 60°. Проведем прямые так, чтобы он был равен 120°. Длины $AM=k$ и $BM=l$ — целые числа (одно из них может быть равно нулю). На рисунке 2 $k=1$, $l=2$. Тогда $AB=\sqrt{k^2+kl+l^2}$, а площадь ромба равна $\frac{\sqrt{3}}{2}(k^2+kl+l^2)$.

Мы докажем, что число цветов, участвующих в раскраске, равно отношению площади $ABCD$ к площади одного окрашенного квадратика (случай (а)) или шестиугольника (случай (б)) и, тем самым, равно:

в случае квадратов k^2+l^2,

в случае шестиугольников k^2+kl+l^2

(так как площадь одного шестиугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$).

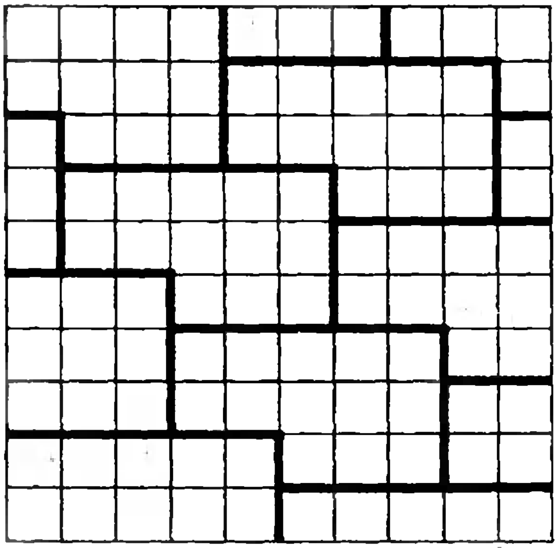
Это сразу следует из следующей леммы.

Основная лемма. Часть $ABCD$, закрашенная каждым цветом, участвующим в раскраске, либо представляет собой один квадратик (в случае (а)), соответственно шестиугольник (в случае (б)), либо состоит из кусочков (для красного цвета — четырех, для других цветов — двух), из которых можно сложить такой же квадратик или соответственно шестиугольник.

Доказательство леммы несложно, и мы предлагаем читателю провести

Рис. 4. Плоскость заполнена одинаковыми фигурами площади 13 каждая. Попробуйте найти «элементарный» кусок заполненной таким образом плоскости и склеить из него тор, как мы это сделали с квадратом.

Указание. Надо выбрать 13 фигур, из них сложить многоугольник, который не будет квадратом, но тем не менее легко склеится в тор. Делать это надо с листом клетчатой бумаги.



его самостоятельно. Заметим только, что раскраска всех квадратов (ромбов) жирной сетки одинакова, то есть если вырезать квадрат (ромб) $ABCD$ из плоскости и наложить его, скажем, на соседний квадрат (ромб), то часть $ABCD$, закрашенная любым цветом, точно совместится с частью соседнего квадрата (ромба), закрашенной тем же цветом.

Существует другой способ изложить это доказательство, более красивый, но требующий некоторой работы воображения. Ограничимся сначала случаем квадратной сетки. Вырежем из плоскости квадрат $ABCD$ и склеим из него трубку — цилиндр, раскрашенной стороной снаружи, совместив стороны AB и DC. Эта трубка ограничена двумя окружностями, получившимися из сторон AB и DC. Склеим эти окружности друг с другом (совместив точку $A=D$ с точкой $B=C$). Бумажную трубку придется для этого сплющить, но мы все равно будем считать всю ее окрашенную поверхность за единое целое, не разделенное на части сгибами. Площадь поверхности полученной фигуры равна k^2+l^2, а часть ее, закрашенная любым из цветов раскраски, — квадратик размером 1×1. Мы вам советуем все это практически проделать с квадратным листком бумаги, раскрасив его пятью или большим числом цветов.

В случае шестиугольников мы придем к аналогичному результату, если таким же образом склеим прямоугольник, имеющий одну сторону, общую с ромбом $ABCD$, а другую, равную высоте ромба.

Можно заполнить плоскость и другими равными фигурами, в которых площади, закрашенные разными цветами, равны. Например, в решении задачи (а), присланном из Киева (пер. Белинского 8, кв. 32, фамилия автора не указана), предлагается заполнить плоскость фигурами, составленными из двух квадратов со сторонами k и l. Скажем, для $k=2$ и $l=3$ (13 цветов) фигура будет такой, как на рисунке 4.

II. Теперь пусть нам дано число $m=k^2+l^2$ или $n=k^2+kl+l^2$. Покажем, что плоскость можно заполнить в соответствии с условием квадратами m цветов или шестиугольниками n цветов.

Заполним плоскость равными квадратами или правильными шестиугольниками и начнем их раскрашивать следующим образом.

Закрасим один из них красным. Отсчитаем от него k квадратиков (шестиугольников) в одну сторону, потом повернем на 90° для квадратов и на 60° для шестиугольников и отсчитаем l квадратиков (шестиугольников) в новом направлении, и тот квадратик (шестиугольник), в который мы придем, тоже закрасим красным. На отрезке, соединяющем центры двух красных квадратиков (шестиугольников), как на стороне, построим квадрат (а) или правильный треугольник (б). Пристраивая к нему равные квадраты (правильные треугольники), мы получим центры всех квадратов (шестиугольников), которые надо закрасить красным; сдвигая параллельно всю сово-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	3	7	13	21	31	43	57	73	91	111
2		12	19	28	39	52	67	84	103	124
3			27	37	49	63	79	97	117	139
4				48	61	76	93	112	133	156
5					75	91	109	129	151	175
6						108	127	148	171	196
7							147	169	193	219
8								192	217	244
9									243	271
10										300

Табл. 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101
2		8	13	20	29	40	53	68	85	104
3			18	25	34	45	58	73	90	109
4				32	41	52	65	80	97	116
5					50	61	74	89	106	125
6						72	85	100	117	136
7							98	113	130	149
8								128	145	164
9									162	181
10										200

Табл. 2.

купность красных квадратов (шестиугольников), мы будем получать каждый раз новую совокупность незакрашенных квадратов (шестиугольников) и закрашивать ее новым цветом, пока не закрасим всю плоскость. По доказанному выше число цветов будет равно k^2+l^2 в случае (а) и k^2+kl+l^2 в случае (б).

III. Какие же натуральные числа представимы в виде k^2+l^2 или k^2+kl+l^2? Чтобы выписать первые несколько таких чисел, удобно составить две таблицы: таблицу 1 — для k^2+l^2, таблицу 2 — для k^2+kl+l^2.

Числа ниже диагонали повторяют уже написанные, и их писать не нужно. Некоторые числа входят в таблицу дважды; соответствующие клетки выделены. Это значит, что при таком числе цветов имеются два существенно различных способа заполнения плоскости. Теперь уже легко начать выписывать эти числа в порядке возрастания.

Первая таблица: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, ...
Вторая таблица: 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21, 25, 27, 28, ...

Пусть мы уже выписали эти числа до какого-то места и ищем следующее по величине число. Красные линии, проведенные на первой таблице, помогают это сделать. Чтобы объяснить, как они проведены, заметим, что в первой таблице каждое число равно квадрату расстояния от центра той клетки, в которой оно стоит до точки 0 в левом верхнем углу (за единицу длины принимаем сторону клетки). Поэтому, если провести несколько окружностей с центром 0, то они разобьют наши числа (то есть центры клеток, в которых они стоят) на группы в порядке возрастания. Если попытаться провести от руки аналогичные линии во второй таблице, то может показаться, что они прямые. Но это, конечно, не так. На самом деле это графики соотношений вида

$$k^2+kl+l^2=c=\text{const}$$

в системе координат с началом 0 и осями, идущими: ось k — вправо, ось l — вниз. Перейдя к другой паре переменных: $x=k+l$, $y=k-l$, можно увидеть, что это эллипсы, вытянутые в направлении оси y *).

В определенном смысле мы получили ответ, но, быть может, его можно упростить. Например, если в какой-то другой задаче мы получим ответ: *все числа вида* $k^2+l^2+m^2+n^2$, *где* k, l, m, n *целые*, то его можно будет переписать так: *любое целое неотрицательное число*, поскольку все натуральные числа представимы в таком виде. Может быть, и в нашу последователь-

*) Те, кто читал книжку Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые», конечно, заметили, что красные линии — это линии уровня функций k^2+l^2 и k^2+kl+l^2 на плоскости (k, l).

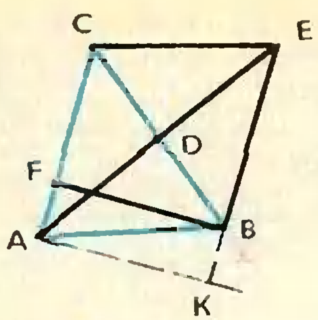


Рис. 5, *а*.

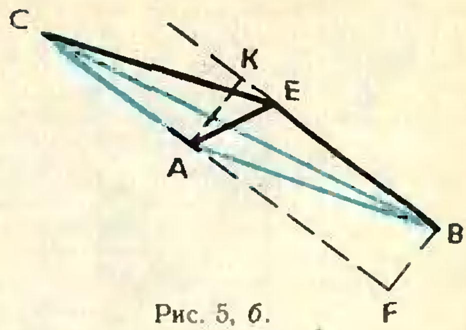


Рис. 5, *б*.

ность входят все натуральные числа, начиная с некоторого места? Чтобы доказать, что это не так, можно воспользоваться системой пунктирных линий.

Проведем в первой таблице красную окружность с центром 0 радиуса n. Центры всех клеток, в которых стоят числа, меньшие или равные n^2, лежат внутри или на границе сектора этой окружности с центральным углом 45°. Поэтому все такие клетки лежат внутри фигуры, получающейся из этого сектора, если к нему добавить окаймляющую его полосу ширины 1. Площадь этой фигуры меньше $\frac{\pi n^2}{8}+3n+4$.

Отсюда среди первых n^2 натуральных чисел меньше $\frac{\pi n^2}{8}+3n+4$, представимых в виде k^2+l^2. При больших n второе число меньше первого и составляет от него примерно $\frac{\pi}{8}$. В действительности, так как некоторые числа в таблице равны, чисел вида k^2+l^2 еще меньше. Легко убедиться в том, что доля чисел, представимых в виде k^2+kl+l^2, еще меньше.

М4. Дан отрезок AB. Найти на плоскости множество точек C таких, что в треугольнике ABC медиана, проведенная из вершины A, равна высоте, проведенной из вершины B.

Решение

Редакция получила много писем с решениями этой задачи, но почти все они неполные. Многие читатели забыли, что при отыскании геометрического места точек (ГМТ) надо обязательно убедиться в двух вещах: 1) все точки найденного множества удовлетворяют условию; 2) все точки, удовлетворяющие условию, принадлежат найденному множеству. Требование 1) многие как раз и не учли. Мы приведем два решения задачи: одно — чисто геометрическое, второе — с помощью метода координат.

Первое решение. Начнем с 2). Пусть нам дан отрезок AB и пусть C — точка, удовлетворяющая условию, AD — медиана треугольника ABC. Достроим треугольник до параллелограмма, продолжив медиану AD до точки E так, что $AD=DE$. Здесь возможны два случая: угол AEB острый или тупой.

(*а*) Пусть угол AEB острый (рис. 5, *а*). Проведем $BF\perp AC$, $AK\parallel BF$, тогда в прямоугольном треугольнике AEK катет AK равен половине гипотенузы AE, поэтому $\angle AEB=30°$.

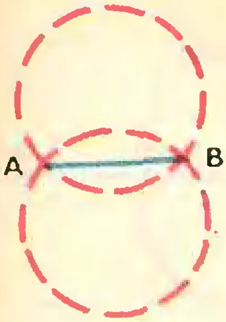


Рис. 6, *а*.

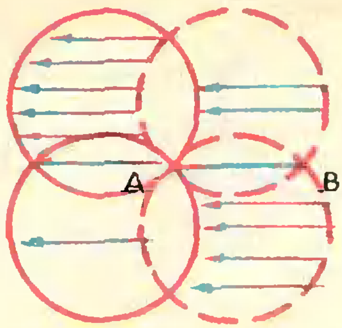


Рис. 6, *б*.

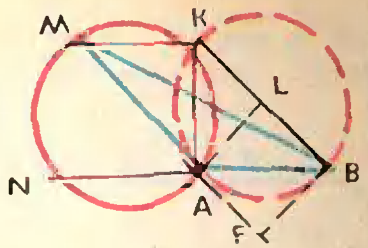


Рис. 7, *а*

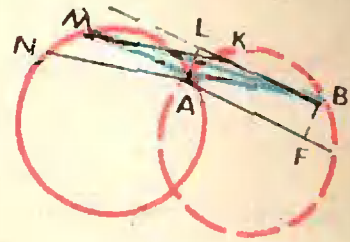


Рис. 7, *б*.

(б) Пусть угол AEB тупой (рис. 5, *б*). Проведя $BF \perp AC$, $AK \parallel BF$, получим аналогично случаю (а), что $\angle AEK = 30^\circ$, поэтому $\angle AEB = 150^\circ$ (отличие от случая (а) в том, что теперь точки K и B лежат по разные стороны от E).

Итак, если C — искомая точка, то отрезок AB виден из точки E под углом в 30° или в 150°. Как известно, все такие точки E находятся на двух окружностях O_1 и O_2, которые делятся хордой AB на дуги в 300° и 60° (рис. 6, *а*), и, следовательно, все точки C — на таких же окружностях O_1' и O_2', полученных из O_1 и O_2 параллельным переносом на отрезок $l = AB$ в направлении от B к A (рис. 6, *б*).

Теперь докажем, что любая точка M окружностей O_1' и O_2' принадлежит искомому множеству точек. Пусть M — произвольная точка одной из этих окружностей; тогда проведя $MK = AB$, $MK \parallel AB$, мы получим точку K на одной из окружностей O_1 или O_2 (рис. 7, *а*, *б*). На рисунке 7, *а* $BF \perp MA$, $AL \parallel BF$, $AL = BF$, тогда (из ΔAKL) $AL = \frac{1}{2} AK$, т. е. точка M удовлетворяет условию. Аналогично на рисунке 7, *б* $BF \perp MA$, $AL = BF$, $AL \parallel BF$, $\angle AKB = 150^\circ$, $\angle AKL = 180^\circ - \angle AKB = 30^\circ$, т. е. $AL = \frac{1}{2} AK$, и точка M также удовлетворяет условию. Итак, все точки O_1' и O_2', кроме точек N и A, удовлетворяют условию.

Отметим, что многие читатели, решавшие задачу геометрически, получали в ответе части окружностей O_1' и O_2'. (Рисунок 8, *а* получился, например, у В. Машанова из г. Гродно, рисунок 8, *б* — у С. Иваненко из г. Феодосии и рисунок 8, *в* у А. Аляева из Пензенской обл.) Правильное решение (хотя и немного отличное от приведенного здесь) прислала Л. Столярова из г. Пензы.

Второе решение. (Небольшое упрощение решения, присланного А. Гришковым из г. Томска.) Введем прямоугольную систему координат с началом в точке A, пусть точка B имеет координаты (2; 0), а искомая точка C — координаты $(x; y)$. Пусть AF — медиана в треугольнике ABC, $BK \perp AC$ (рис. 9). Легко показать, что точка F имеет координаты $\left(\frac{x+2}{2}; \frac{y}{2}\right)$. Тогда $AF^2 = \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}$. По условию $BK^2 = AF^2$, поэтому

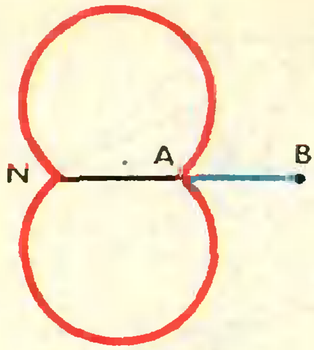


Рис. 8, *а*.

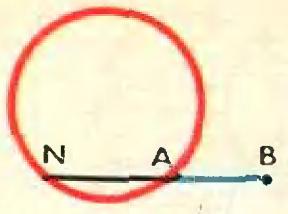


Рис. 8, *б*.

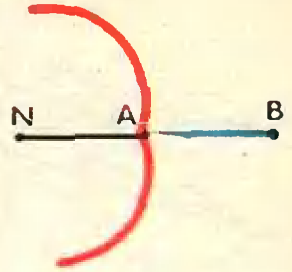


Рис. 8, *в*.

из подобия треугольников AKB и ACD следует, что $\frac{BK^2}{AK^2}=\frac{CD^2}{AD^2}$ или

$$\frac{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+\frac{y^2}{4}}{4-\left[\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+\frac{y^2}{4}\right]}=\frac{y^2}{x^2}. \tag{1}$$

Преобразовывая (1), получим

$$y^4+(2x^2+4x-12)\,y^2+(2x+x^2)^2=0. \tag{2}$$

Это и есть уравнение, связывающее координаты искомых точек. Некоторые читатели писали дальше, что оно определяет кривую четвертого порядка, нарисовать которую довольно трудно.

На самом деле оказывается, что левая часть уравнения (2) раскладывается на множители:

$$[(x+1)^2+(y+\sqrt{3})^2-4]\,[(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2-4]=0. \tag{3}$$

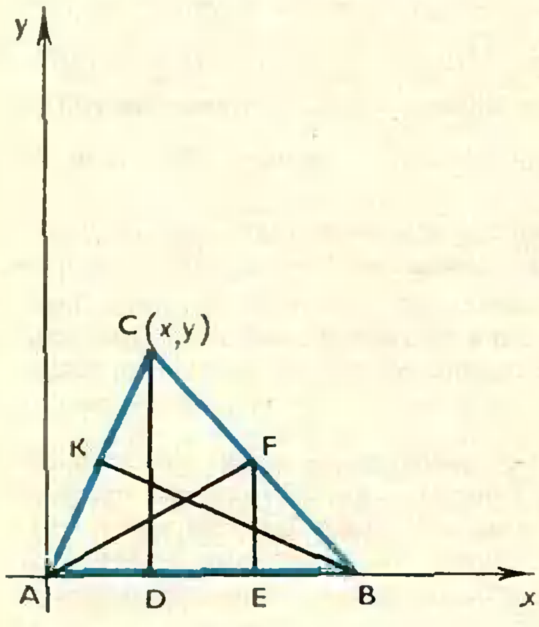


Рис. 9.

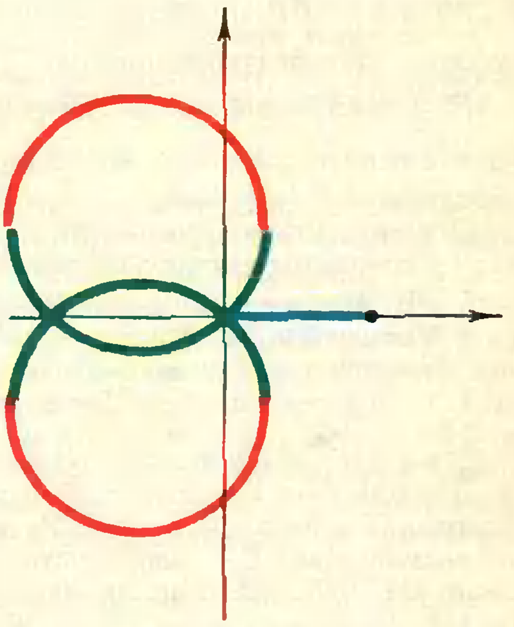


Рис. 10.

Догадаться об этом можно, например, так.

Введем обозначение: $y^2=z$. Тогда (2) — квадратное уравнение относительно z. Разложим его левую часть на множители. Для этого найдем корни (2).

$$z_{1,2}=\frac{12-2x^2-4x\pm\sqrt{(12-2x^2-4x)^2-4(2x+x^2)^2}}{2}=$$

$$=\frac{12-2x^2-4x\pm\sqrt{48(3-x^2-2x)}}{2}=6-x^2-2x\pm2\sqrt{3(3-x^2-2x)}=$$

$$=(\sqrt{3-x^2-2x}\pm\sqrt{3})^2.$$

Уравнение (2) можно представить теперь в таком виде:

$$\left[z-(\sqrt{3-x^2-2x}+\sqrt{3})^2\right]\left[z-(\sqrt{3-x^2-2x}-\sqrt{3})^2\right]=0$$

или

$$\left[y^2-(\sqrt{4-(x+1)^2}+\sqrt{3})^2\right]\left[y^2-(\sqrt{4-(x+1)^2}-\sqrt{3})^2\right]=0. \qquad (4)$$

Подумайте, какие множества задает каждое из уравнений

$$y^2-(\sqrt{4-(x+1)^2}+\sqrt{3})^2=0 \text{ и } y^2-(\sqrt{4-(x+1)^2}-\sqrt{3})^2=0$$

(см рисунок 10, где одно из этих множеств — красное, а другое — зеленое).

Преобразуем (4) дальше:

$$\left[y-\sqrt{4-(x+1)^2}-\sqrt{3}\right]\left[y+\sqrt{4-(x+1)^2}-\sqrt{3}\right][\ldots][\ldots]=0;$$

отсюда получается (3)*).

Девятиклассник *П. Криксунов* из г. Киева и некоторые другие читатели, приславшие нам решения этой задачи, заметили, что аналогично можно решить и такую более общую задачу: *найти множество точек C таких, что в треугольнике ABC отношение медианы AD к высоте BF равно данному числу k* (годится любой из двух описанных выше способов решения).

М5. В множестве E, состоящем из n элементов, выделены m различных подмножеств (отличных от самого E) так, что для каждых двух элементов из E найдется ровно одно из данных подмножеств, в которое входят оба эти элемента.

Доказать, что $m\geqslant n$. В каких случаях возможно равенство?

Решение

По письмам читателей можно судить о том, что эта задача чрезвычайно трудная, но интересная. Собственно говоря, здесь мы имеем дело с двумя задачами: 1) доказать, что $m\geqslant n$, 2) в каких случаях возможно равенство?

Что касается первой задачи, то ее решил полностью только *А. Суслин* из г. Ленинграда. Его доказательство опирается на одну из основных теорем линейной алгебры, утверждающую, что если число n-векторов больше чем n, то они линейно зависимы.

Для тех, кто знаком с этими понятиями, будет интересно придумать такое доказательство. Что касается второй задачи, то ее пока полностью никто не решил, да это и не удивительно, так как ниже будет показано, что она сводится к одной известной, но нерешенной математической проблеме.

Для удобства изложения некоторые читатели предложили другие формулировки задачи. Вот две из них.

---

*) Уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ определяет окружность с центром в точке $(a;\ b)$ радиуса c (см., например, И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов, Метод координат, «Наука», 1968).

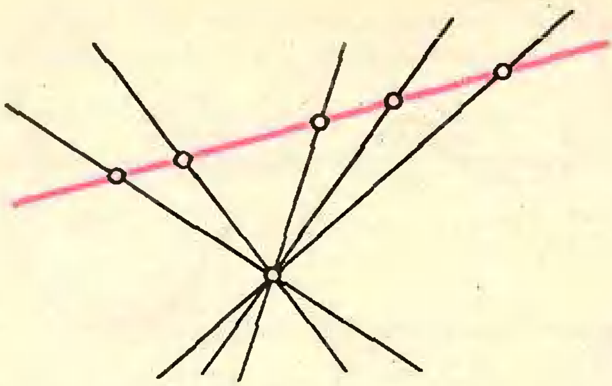


Рис. 11.

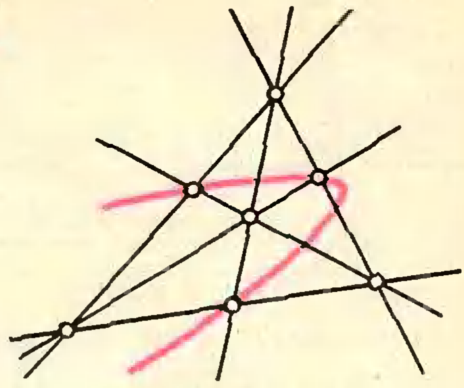


Рис 12.

а) Учащиеся одной школы часто собираются группами и ходят есть мороженое. После такого посещения они ссорятся настолько, что никакие двое из них после этого вместе мороженое не едят. К концу года выяснилось, что в дальнейшем они могут ходить в кафе-мороженое только поодиночке. Доказать, что если число посещений было к этому времени больше 1, то оно не меньше числа учащихся в школе.

б) Пусть дано n точек. Через каждые две точки проведена ровно одна прямая, причем на каждой прямой лежит не более чем $(n-1)$ точек. Нужно доказать, что число прямых не меньше n.

Являются ли эти задачи эквивалентными первоначальной?

Во всяком случае, удобно, размышляя над этой задачей, представлять себе элементы «точками», а подмножества — «линиями», проходящими через эти точки и делать для себя рисунки типа наших рисунков 11 и 12. (Но добиться, чтобы все линии были прямыми, вообще говоря, нельзя; как показывает задача **М36**, рисунок 12 нельзя исправить так, чтобы и красная линия была прямой, так что задача *б*) не эквивалентна исходной.)

Далее мы излагаем решение задачи, следуя указаниям самого автора задачи Н. Бурбаки*), и также для удобства переписываем условие задачи.

Дано n различных элементов и имеется система m множеств, составленных из этих элементов, причем:

1) никакое множество нашей системы не содержит сразу всех элементов;

2) каждые два из данных n элементов встречаются в одном из множеств системы;

3) если два элемента встретились в одном из множеств, то они не встречаются вместе ни в одном из остальных множеств системы.

Докажем, что $m \geq n$.

Приведем какой-нибудь пример такого размещения элементов. Пусть $n=5$ и имеются элементы: a, b, c, d, e. Составим такую систему множеств из этих элементов:

$$(a, b), (a, c, e), (b, e), (b, c), (b, d), (a, d), (d, e), (c, d).$$

Очевидно, она удовлетворяет условиям 1), 2), 3). Здесь $m=8$, и кстати $8 \geq 5$.

Для того чтобы доказательство было более наглядным, мы будем иногда ссылаться на этот пример.

Доказательство. Заметим, что $n>2$ и что достаточно доказать неравенство $m \geq n$ для системы множеств, содержащих не менее двух элементов.

1. *Система состоит не менее чем из двух множеств.* Если бы система состояла из одного множества, то в силу условия *2*) это множество содержало бы сразу все элементы, что противоречит условию *1*).

*) См. Н. Бурбаки. Теория множеств, «Мир», М., 1965, стр. 220.

2. *Каждый элемент входит не менее чем в два множества системы.* Если бы элемент входил только в одно множество, то в силу *2)* оно должно было бы содержать все n элементов, что противоречит *1)*.

3. *Один и тот же элемент не может входить сразу во все множества системы.* Пусть какой-то элемент, назовем его x, входит во все множества системы. Тогда в силу условия *3)* никакие два множества не содержат одинаковых элементов, за исключением элемента x. Следовательно, никакие два элемента, отличные от x, не встречаются ни в одном из множеств, но это противоречит *2)*.

4. Сопоставим каждому элементу число множеств системы, в которые он входит, т. е. считаем, сколько раз он повторяется в этой системе. В примере элементу a сопоставляется число 3, элементу b — 4 и т. д.

Каждому множеству системы сопоставим число элементов, которые оно содержит. В примере первому множеству сопоставляется число 2, второму — 3 и т. д.

Сумма всех чисел, соответствующих элементам, равна сумме всех чисел, соответствующих множествам. В примере $3+4+3+4+3=2+3+2+2+2+2+2+2=17$.

В самом деле, если считать два элемента разными, когда они входят в разные множества, то обе суммы равны числу элементов всех множеств системы.

5. Обозначения. Возьмем один из тех элементов, которым соответствует наименьшее число, т. е. который входит в наименьшее число множеств системы. В примере мы можем взять либо a, либо c, либо e; возьмем a. Обозначим этот элемент через a_n, а число множеств, в которые он входит, через k_n. В примере $a_5=a$, $k_5=3$. В силу пп. 2 и 3 имеем $2\leqslant k_n<m$.

Множества, в которые входит a_n, обозначим в некотором порядке через $A_1, A_2, \ldots, A_{k_n}$, а остальные через $A_{k_n+1}, \ldots, A_m$. В примере $A_1=(a, b)$, $A_2=(a, c, e)$, $A_3=(a, d)$, $A_4=(b, e)$, ..., $A_8=(c, d)$.
Рассмотрим первые k_n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{k_n}$. Рассуждая так же, как в п. 3, мы видим, что никакие два из них не содержат одинаковых элементов, за исключением a_n. Следовательно, мы можем взять по одному элементу каждого из этих множеств и обозначить их соответственно через $a_1, a_2, \ldots, a_{k_n}$. Остальные элементы обозначим в некотором порядке через $a_{k_n+1}, a_{k_n+2}, \ldots, a_n$. В примере полагаем $a_1=b$, $a_2=c$, $a_3=d$, $a_4=e$; тогда $A_1=(a_1, a_5)$, $A_2=(a_2, a_4, a_5)$, $A_3=(a_3, a_5)$, $A_4=(a_1, a_4)$, $A_5=(a_1, a_2)$, $A_6=(a_1, a_3)$, $A_7=(a_3, a_4)$, $A_8=(a_2, a_3)$.

Теперь обозначим числа, соответствующие элементам $a_1, a_2, \ldots, a_{k_n}, \ldots, a_{n-1}$ в том же порядке через $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$. Напомним, что элементу a_n соответствует число k_n, причем оно наименьшее из всех чисел $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n$.

Наконец, обозначим числа, соответствующие множествам $A_1, A_2, \ldots, A_m$ в том же порядке через $s_1, s_2, \ldots, s_{k_n}, \ldots, s_m$.

Обратим еще раз внимание на то, как мы пронумеровали элементы и множества.

Во-первых, k_n наименьшее из чисел $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$.

Во-вторых, k_n — номер последнего из множеств, в которые входит элемент a_n, и, таким образом, элемент a_n не входит в множества $A_{k_n+1}, \ldots, A_m$.

Множество A_i содержит элемент a_i, но не содержит элементов a_j, если $1\leqslant i\leqslant k_n$, $1\leqslant j\leqslant k_n$ и $i\neq j$. Кроме того, согласно п. 4, $k_1+\ldots+k_n=s_1+\ldots+s_m$.

6. *Если элемент a_i не принадлежит какому-нибудь множеству A_j, то $k_i \geqslant s_j$.* Действительно, пусть множество A_j не содержит элемента a и состоит из s_j различных элементов. Тогда элемент a_i должен встретиться с каждым из этих элементов в каком-нибудь из остальных множеств системы. С другой стороны, никакие два из этих элементов не могут ни разу встретиться в этих множествах, так как они уже встречались в A_j. Следовательно, число множеств, в которые входит элемент a_i, не меньше числа s_j.

7. Рассмотрим первые k_n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{k_n}$ и первые k_n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_{k_n}$. Они выбраны таким образом, что каждое множество A_i содержит элемент a_i с тем же номером, но не содержит элементов с другими номерами, тогда, согласно п. 6, $s_1 \leqslant k_2$, $s_2 \leqslant k_1$, если $k_n = 2$ и

$$\left.\begin{array}{l} s_1 \leqslant k_2, \quad s_2 \leqslant k_1, \ \ldots, s_{k_n} \leqslant k_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_1 \leqslant k_{k_n}, \quad s_2 \leqslant k_{k_n}, \ \ldots, \ s_{k_n} \leqslant k_{k_{n-1}}, \end{array}\right\} \text{ если } k_n > 2.$$

В примере $k_n = 3$ и

$$\left.\begin{array}{l} 2 = s_1 \leqslant k_2 = 3, \quad 3 = s_2 \leqslant k_1 = 4, \quad 3 = s_3 \leqslant k_1 = 4, \\ 2 = s_1 \leqslant k_3 = 4, \quad 3 = s_2 \leqslant k_3 = 4, \quad 3 = s_3 \leqslant k_2 = 3. \end{array}\right\}$$

8. Складывая все неравенства, мы получаем, что

$$(k_n - 1)(s_1 + s_2 + \ldots + s_{k_n}) \leqslant (k_n - 1)(k_1 + \ldots + k_{k_n})$$

или

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{k_n} \leqslant k_1 + \ldots + k_n.$$

9. Теперь мы можем доказать требуемое в задаче неравенство $m \geqslant n$. Допустим, что $m < n$. Сравним две суммы

$$S = (s_1 + s_2 + \ldots + s_{k_n}) + s_{k_n+1} + \ldots + s_m$$

и

$$K = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n) + k_{k_n+1} + \ldots + k_n.$$

Заметим, что мы так перенумеровали множества, что элемент a_n не принадлежит множествам $A_{k_n+1}, \ldots, A_m$; значит, $s_{k_n+1} \leqslant k_n, \ldots, s_m \leqslant k_n$ и тем более $s_{k_n+1} \leqslant k_{k_n+1}, \ldots, s_m \leqslant k_m$, так как k_n — наименьшее из всех чисел k_i. В таком случае, поскольку $m < n$, получаем: $k_{k_n+1} + \ldots + k_n > s_{k_n+1} + \ldots + s_m$, но тогда $S < K$, а это противоречит п. 4.

Доказательство того, что $m \geqslant n$, окончено.

10. Попробуем выяснить, в каких случаях возможно равенство. Если $m = n$, то из пп. 8, 9 и 4 следует:

$$k_1 + \ldots + k_{k_n} + \ldots + k_n = s_1 + \ldots + s_{k_n} + \ldots + s_n.$$

Очевидно, для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$k_1 + \ldots + k_{k_n} = s_1 + \ldots + s_{k_n}$$

и все неравенства из п. 8 превратились в равенства.

Поскольку k_n наименьшее из чисел k_i, мы имеем

$$s_{k_n+1} + \ldots + s_n = k_{k_n+1} + \ldots + k_n.$$

Далее рассмотрим два случая.

(*а*) $k_n = 2$. В этом случае, как нетрудно видеть, возможна такая система множеств (рис. 9): (a_n, a_1), $(a_n, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})$, (a_1, a_2), (a_1, a_3), $\ldots$, (a_1, a_{n-1}). При любом n она удовлетворяет условию задачи.

(*б*) $k_n > 2$. В этом случае получаем, что все неравенства п. 7 должны обратиться в равенства. Сравнивая все эти равенства, получаем, что $s_1=s_2=\ldots$ $\ldots=s_{k_n}=k_1=k_2=\ldots=k_{k_n}$.

И так же, как для случая (*a*): $s_{k_n+1}=\ldots=s_n=k_{k_n+1}=\ldots=k_{n-1}=k_n$. Очевидно, что одно из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_{k_n}$ не более одного из чисел $k_{k_n+1}, \ldots$ $\ldots, k_{n-1}$ и, следовательно, $s_1=s_2=\ldots=s_n=k_1=k_2=\ldots=k_n=l>2$.

В итоге мы получаем, что в этом случае выполняется такое условие:

4) *каждое множество содержит ровно l различных элементов и каждый элемент входит ровно в l различных множеств.*

Для этого необходимо, чтобы $n=l\,(l-1)+1$. Действительно, рассмотрим какой-нибудь элемент x. Он должен входить ровно в l множеств, следовательно, все эти множества содержат все n элементов так, как x должен встречаться со всеми элементами. Кроме того, они не могут содержать одинаковые элементы, так как все они содержат элемент x. Отсюда получаем требуемое равенство.

Для $l=3$, т. е. $n=7$, легко построить нужную систему множеств (рис. 10). Но вопрос о том, для каких n вида l^2-l+1 у множества из n элементов существует система подмножеств, удовлетворяющая условиям *1*), *2*), *3*) и *4*), оказывается очень сложным.

Такая система имеет специальное название: *конечная проективная плоскость порядка* $l-1$. (На рис. 12 изображена проективная плоскость порядка 2, состоящая из 7 точек и 7 прямых.) Легко доказать, что для любой конечной проективной плоскости выполняется и такое свойство, «двойственное» свойству *2*):

5) *Любые два множества из нашей системы имеют общий элемент (очевидно, только один); другими словами, каждые две прямые пересекаются в одной точке.*

Покажем, как построить конечную проективную плоскость порядка p (с $n=p^2-p+1$), где p — простое число. Для этого нужно использовать «числа» из p-арифметики (см. статью «Сравнения по модулю и арифметика остатков», «Квант» № 5, стр. 27—33) — арифметики остатков по модулю p. В такой арифметике, если p — простое, можно делить любое «число» на любое другое, отличное от нуля. Назовем точкой тройку «чисел» (x_1, x_2, x_3), рассматриваемых с точностью до пропорциональности (т. е. тройки (x_1, x_2, x_3) и (kx_1, kx_2, kx_3) определяют одну и ту же точку). Договоримся тройку $(0, 0, 0)$ не считать точкой.

Прямая задается тройкой чисел (a_1, a_2, a_3) (кроме тройки $(0, 0, 0)$), рассматриваемых с точностью до пропорциональности. Точка (x_1, x_2, x_3) принадлежит прямой (a_1, a_2, a_3) в том и только в том случае, когда a_1x_1+ $+a_2x_2+a_3x_3=0$.

Проверьте, что для так определенных прямых и точек выполнены все условия *1*)—*5*). Убедитесь, что для $p=2$ получается как раз тот пример проективной плоскости порядка 2, который изображен на рисунке 12.

Аналогично можно доказать, что существует проективная плоскость порядка p^k, где p — простое, k — любое натуральное. Доказано, что проективных плоскостей порядка N не существует для бесконечного количества N (в частности, для $N=6$, $N=14$). Но уже для $N=10$ неизвестно, существует ли проективная плоскость порядка N или нет: просто перебрать все возможные комбинации не может ни одна вычислительная машина.

О теории конечных проективных плоскостей и связанных с ними комбинаторных задачах можно прочесть в книге Г. Дж. Райзера «Комбинаторная математика» («Мир», 1966, серия «Библиотека сборника «Математика»).

А. Тоом, Ж. Раббот, В. Гутенмахер

У НАС В ГОСТЯХ ЖУРНАЛ «МАТЕМАТИКА»

«Математика» — журнал для учеников средних школ Народной Республики Болгарии, издающийся ЦК Димитровского Коммунистического Союза Молодежи и Министерством народного просвещения. Старшеклассники Болгарии, увлекающиеся математикой, получают ежегодно по 6 книжек журнала объемом в 48 страниц. Журнал пользуется большой популярностью — его тираж превышает 50 тыс. экземпляров. В редколлегию «Математики» входит ряд известных болгарских математиков, много времени и сил отдающих пропаганде математики среди молодежи.

Традицией журнала является систематическая публикация рассказов о выдающихся ученых-математиках, научно-популярных статей о развитии математической науки и ее приложениях. Из номера в номер журнал печатает небольшие материалы по математическим проблемам, доступным старшеклассникам, знакомит своих читателей с современным изложением ряда вопросов элементарной математики, с такими разделами науки, как теория множеств, теория групп и др. Особенно приятно отметить, что все статьи написаны доступно, увлекательно и ярко. Среди материалов журнала встречаются переводы статей иностранных, в частности, советских математиков.

Значительное место журнал отводит задачам, рекомендуемым для оканчивающих школу, для поступающих в институты и техникумы. Специальный отдел посвящен более трудным задачам: читателям предлагается участвовать в конкурсе их решения. Последние несколько страниц журнала содержат занимательные и шуточные вопросы.

В этом номере «Кванта» мы познакомим наших читателей с несколькими материалами, переведенными из журнала «Математика».

Редакции журнала «Квант»

Редакция журнала «Математика» получила первые номера журнала «Квант».

От имени наших многочисленных читателей и от имени редакции сердечно поздравляем Вас с созданием Вашего журнала и желаем плодотворной и успешной работы. Журнал «Математика», который издается уже девять лет, — родной брат «Кванта». И мы будем очень рады, если оба журнала в дальнейшем установят тесное сотрудничество.

С дружеским приветом журнал «Математика»

Гл. редактор проф. А. Матеев

О двух действиях с действительными числами

Кирил Чимев

Действия сложения и умножения действительных чисел подчиняются ряду законов. Напомним некоторые из них:

1. Коммутативность сложения: $a+b=b+a$.
2. Ассоциативность сложения: $(a+b)+c=a+(b+c)$
3. Коммутативность умножения: $ab=ba$.
4. Ассоциативность умножения: $(ab)c=a(bc)$.
5. Дистрибутивность умножения относительно сложения:
$$(a+b)c=ac+bc.$$

Любопытно, однако, что эти законы остаются справедливыми и в некоторых других случаях, когда под «сложением» и «умножением» понимаются иные операции, отличные от привычного нам сложения и умножения действительных чисел.

Под «суммой»*) двух действительных чисел a и b условимся понимать max (a, b), то есть наибольшее из чисел a и b, если $a\neq b$, и любое из них, если $a=b$. Операцию «сложения», которая любым двум действительным числам a и b ставит в соответствие их «сумму», будем обозначать знаком $\oplus$, так что

$$a\oplus b=\max(a,\ b).$$

Например:

$$(-3)\oplus 2=2,$$
$$0\oplus(-\sqrt{2})=0,$$
$$\pi\oplus\pi=\pi.$$

Коммутативность «сложения»

$$a\oplus b=b\oplus a$$

очевидна, так как

$$\max(a,\ b)=\max(b,\ a).$$

Под «произведением» двух действительных чисел a и b условимся понимать число min (a, b), то есть наименьшее из чисел a и b, если $a\neq b$, и любое из них, если $a=b$. Операцию «умножения», которая любым двум действительным числам a и b ставит в соответствие их «произведение», будем обозначать знаком $\otimes$, так что

$$a\otimes b=\min(a,\ b).$$

Например:

$$(-3)\otimes 2=-3,$$
$$0\otimes(-\sqrt{2})=-\sqrt{2},$$
$$\pi\otimes\pi=\pi.$$

Коммутативность «умножения»

$$a\otimes b=b\otimes a$$

очевидна, так как

$$\min(a,\ b)=\min(b,\ a).$$

Для того, чтобы установить ассоциативность «сложения»

$$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c), \qquad (1)$$

мы должны убедиться в справедливости равенства

$$\max(\max(a,\ b),\ c)=\max(a,\ \max(b,\ c)).$$

Для этого составим таблицу 1. В ее левой колонке перечислены все возможные расположения трех действительных чисел a, b, c в порядке возрастания, а в следующих колонках для каждого из расположений указаны

*) Мы ставим кавычки, чтобы избежать путаницы с привычными арифметическими операциями.

Таблица 1	$\max(a, b)$	$\max(\max(a, b), c)$	$\max(b, c)$	$\max(a, \max(b, c))$
$a \leqslant b \leqslant c$	b	c	c	c
$a \leqslant c \leqslant b$	b	b	b	b
$b \leqslant a \leqslant c$	a	c	c	c
$b \leqslant c \leqslant a$	a	a	c	a
$c \leqslant a \leqslant b$	b	b	b	b
$c \leqslant b \leqslant a$	a	a	b	a

Таблица 2	$\max(a, b)$	$\min(\max(a, b), c)$	$\min(a, c)$	$\min(b, c)$	$\max(\min(a, c), \min(b, c))$
$a \leqslant b \leqslant c$	b	b	a	b	b
$a \leqslant c \leqslant b$	b	c	a	c	c
$b \leqslant a \leqslant c$	a	a	a	b	a
$b \leqslant c \leqslant a$	a	c	c	b	c
$c \leqslant a \leqslant b$	b	c	c	c	c
$c \leqslant b \leqslant a$	a	c	c	c	c

величины $a \oplus b$, $(a \oplus b) \oplus c$, $b \oplus c$, $a \oplus (b \oplus c)$. Из этой таблицы видно, что равенство (1) справедливо для любых действительных чисел a, b, c.

Таким образом мы можем говорить теперь о «сумме» трех действительных чисел $a \oplus b \oplus c$, определяя ее как $a \oplus (b \oplus c)$ или, что то же самое, как $(a \oplus b) \oplus c$. Более внимательное изучение той же таблицы 1 приводит нас к заключению, что $a \oplus b \oplus c = \max(a, b, c)$.

Ассоциативность «умножения», т. е. справедливость для любых действительных a, b, c равенства

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

или, что то же самое, равенства $\min(\min(a, b), c) = \min(a, \min(b, c))$ читатель проверит самостоятельно тем же способом, каким мы убедились в ассоциативности «сложения».

Установим теперь дистрибутивность «умножения» относительно «сложения»:

$$(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c), \qquad (2)$$

что можно записать в форме

$$\min(\max(a, b), c) = \max(\min(a, c), \min(b, c)).$$

Для этого достаточно составить таблицу 2, из которой видно, что равенство (2) в самом деле справедливо для трех любых действительных чисел a, b, c.

Как известно, для обычных арифметических операций дистрибутивность сложения относительно умножения места не имеет: не для всех действительных чисел справедливо равенство $(ab) + c = (a + c) \times (b + c)$. Но для введенных нами операций «сложения» и «умножения» и такая дистрибутивность справедлива:

$$(a \otimes b) \oplus c = (a \oplus c) \otimes (b \oplus c). \qquad (3)$$

Читатель сам убедится в этом проверив, что $\max(\min(a, b), c) = \min(\max(a, c), \max(b, c))$ для любых действительных чисел a, b, c.

Интересно, что «сложение» и «умножение» обладает и другими свойствами, которые не наблюдаются в обычной арифметике действительных чисел:

$$a \oplus a = a, \quad a \otimes a = a; \qquad (4)$$

$$a \otimes (a \oplus b) = a, \quad a \oplus (a \otimes b) = a. \qquad (5)$$

Эти соотношения непосредственно вытекают из определений операций $\oplus$ и $\otimes$.

Все знают что каждому действительному числу a можно поставить в соответствие противоположное число, то есть число $-a$. Мы условимся число противоположное a, обозначать символом $\bar a$. Например: $\overline{2{,}5}=-2{,}5$; $\overline{-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$; $\bar 0=0$.

Любопытно, что операции «сложения» и «умножения» оказываются связанными с операцией взятия противоположного числа:

$$\overline{a\oplus b}=\bar a\otimes\bar b;\quad \overline{a\otimes b}=\bar a\oplus\bar b \tag{6}$$

(в обычной арифметике такие формулы неверны!).

Докажите эти формулы сами.

В заключение попробуйте самостоятельно решить такие задачи:

1. Убедитесь, что для $n\geqslant 2$ произвольных действительных чисел $a_1,\ldots,a_n$

$$a_1\oplus\ldots\oplus a_n=\max(a_1,\ldots,a_n),\quad a_1\otimes\ldots\otimes a_n=\min(a_1\ldots,a_n).$$

2. Верны ли соотношения

$$c\otimes(a\oplus b)=(c\otimes a)\oplus(c\otimes b),\quad c\oplus(a\otimes b)=(c\oplus a)\otimes(c\oplus b)?$$

3. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c справедливо равенство

$$\min[\min(a,c),\ \min(\max(a,b),c)]=\min(a,c)$$

и запишите его с помощью операций $\oplus$ и $\otimes$. Как после этого можно сразу же убедиться в его справедливости?

4. Пусть a, b, c, — произвольные действительные числа. Найдите простое выражение для величины

$$\min[a,\ -\max(\min(a,b),\ \max(a,c))].$$

5. Для любых ли действительных чисел a, b, c верно равенство

$$(a\oplus b)\otimes(a\oplus b\oplus c)=a\otimes\overline{[c\otimes(c\oplus b)]}?$$

6. Можно ли найти такое действительное число x, чтобы

$$\max[\min(a,\max(a,b)),\ x]=b?$$

Ниже приведено несколько задач, взятых из постоянного конкурсного отдела журнала «Математика».

1. В некотором царстве, в некотором государстве есть несколько городов, причем расстояния между ними все попарно различны. В одно прекрасное утро из каждого города вылетает по одному самолету, который приземляется в ближайшем соседнем городе.

Может ли в одном городе приземлиться более пяти самолетов?

2. Доказать; что если a, b, c — длины сторон треугольника, а l_a, l_b, l_c — длина проведенных к ним биссектрис внутренних углов, то

$$\frac{l_a}{a}+\frac{l_b}{b}+\frac{l_c}{c}\leqslant\frac{p^2}{2S},$$

где p — полупериметр, а S — площадь треугольника; знак равенства достигается только для равностороннего треугольника.

А. Матеев

3. Доказать, что если действительное число α является корнем уравнения

$$2(x^2+x)\sin 2x+(2x+2-x^3)\cos 2x=x^3+2x+2,$$

то это число удовлетворяет неравенству $|\alpha|<1$.

В. Петков

4. Пусть в плоскости выпуклого многоугольника существует точка, обладающая тем свойством, что любая прямая, проведенная через эту точку, делит многоугольник на две равновеликие части. Доказать, что тогда этот многоугольник является центрально симметричным.

Р. Грозданов

5. Муха, не останавливаясь, ползет в одном направлении с постоянной скоростью по окружности верхнего основания цилиндрической консервной банки, высота которой в 4 раза больше диаметра $2r$ основания. В некоторый момент из наиболее далекой от мухи точки поверхности банки муху начинает преследовать паук, причем он ползет по поверхности банки с постоянной скоростью, равной скорости мухи (и также не останавливается). Найти длину наикратчайшего пути, по которому паук может настигнуть муху.

И. Димовски

Ленинские премии 1970 года

В. А. Лешковцев

1970 год — год великого юбилея, 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, чьим именем названы премии за наиболее выдающиеся исследования и достижения в области науки и техники. Отрадно отметить, что наибольшее количество премий юбилейного года выпало на долю физико-математических исследований. Это является убедительным свидетельством успешного развития советской физики и математики, занимающих передовые рубежи мировой науки. Даже краткий рассказ о работах, удостоенных Ленинских премий, займет, по необходимости, несколько страниц в нашем журнале.

Коллектив сотрудников четырех ведущих научных институтов — Института экспериментальной и теоретической физики, Радиотехнического института, Института физики высоких энергий и Научно-исследовательского института электрофизической аппаратуры — в составе члена-корреспондента АН СССР В. В. Владимирского, Д. Г. Кошкарева, А. А. Кузьмина, члена-корреспондента АН СССР А. А. Логунова, Р. М. Суляева, И. Ф. Малышева удостоен Ленинской премии *за разработку и ввод в действие протонного синхротрона Института физики высоких энергий на энергию 70 Гэв.*

Основным экспериментальным средством для изучения удивительного мира элементарных частиц является ускоритель заряженных частиц. Разгоняя частицы до гигантских энергий, он позволяет исследовать взаимодействие ускоренных частиц с веществом, по различным особенностям которого можно судить о характере сил, действующих между частицами. При таких взаимодействиях рождаются новые элементарные частицы, которых не существует в обычных условиях.

Самым крупным ускорителем в мире является советский протонный синхротрон, построенный недавно в молодом городе науки Протвино под Серпуховым. Он разгоняет атомные ядра водорода — протоны — до энергии в 70 миллиардов электрон-вольт (70 *Гэв*; 1 электрон-вольт равен энергии, которую приобретает электрон, пройдя разность электрических потенциалов в один вольт). Позади остались недавние рекордсмены—ускоритель протонов Европейского атомного центра в Женеве на 28 *Гэв* и аналогичный американский ускоритель Брукхейвенской национальной лаборатории на 33 *Гэв*. Следует заметить, что в ряде проведенных экспериментов энергия протонов, достигнутая в Протвино, оказалась выше проектной и составила 76 *Гэв*.

Основная деталь ускорителя —вакуумная камера — гигантское подземное кольцо длиной 1480 *м*. Камера находится в магнитном поле, образованном при помощи 120 магнитных секций весом по 200 тонн, между которыми размещены 54 ускоряющих устройства (резонатора). Создателям ускорителя пришлось преодолеть громадные трудности, связанные с необычайно строгими требованиями к характеристикам магнитного поля и расположению блоков. Достаточно указать, что отклонение какого-либо блока от заданного положения более чем на 0,1 *мм* нарушает работу ускорителя!

Ускоряемые частицы совершают около 400 000 оборотов за 2,6 секунды и достигают скоростей, весьма близких к скорости света в пустоте. Попадая на мишени, они рождают потоки вторичных частиц (мезонов, антипротонов, нейтрино и т. д.), которые рассортировываются специальными сепараторами по разным каналам для дальнейших исследований.

За короткий срок работы ускорителя в Протвино на нем уже выполнен ряд уникальных экспериментов. Один из них был посвящен поискам так называемых «кварков» (гипотетических элементарных частиц с дробными значениями электрических зарядов), другой завершился созданием атомных ядер антивещества — антигелия с массой 3. Они состоят из двух антипротонов и одного антинейтрона. Нет сомнения, что новый советский ускоритель-рекордсмен поможет ученым вырвать у природы еще не одну тайну микромира.

Коллектив сотрудников Ереванского физического института, Института физики АН Грузинской ССР и Московского инженерно-физического института — член-корреспондент АН СССР А. И. Алиханьян, Т. Л. Асатиани, Г. Е. Чиковани, В. Н. Ройнишвили, Б. А. Долгошеин, Б. И. Лучков — получил премию *за создание нового средства наблюдения элементарных частиц — трековых искровых камер*.

Исследования элементарных частиц требуют не только ускорителей, способных создавать подобные частицы, но и особых методов регистрации следов этих частиц. Таких методов немного, и каждый из них принес науке фундаментальные открытия. Трековая искровая камера — один из лучших современных методов регистрации элементарных частиц. Она состоит из нескольких электродов (пластин или проволочек), соединенных с источником высокого напряжения и помещенных в сосуд, заполненный нейтральным газом. Проходя через газовые промежутки между электродами, быстрая заряженная частица разрушает атомы газа. Возникающие при этом заряженные частицы — осколки атомов — разгоняются электрическим полем, разрушают новые атомы и в конце концов вызывают электрический пробой газа. Так возникает трек — видимый след частицы, образованный цепочкой ярких искр. Конструкция камер такова, что они способны регистрировать частицы в течение очень малых промежутков времени, составляющих миллионные доли секунды. Это позволяет экспериментаторам нацеливать камеру на регистрацию отдельных видов элементарных частиц и характерных для них взаимодействий. Трековые искровые камеры помогли сделать важные открытия, например обнаружить существование двух сортов особых элементарных частиц — нейтрино, один из которых связан с рождением электронов, а другой — с рождением мезонов.

Профессору физического факультета Московского университета А. А. Власову Ленинская премия присуждена *за цикл работ по теории плазмы, содержащий фундаментальный метод исследования ее свойств.*

Плазма — ионизованный газ, состоящий из огромного числа заряженных частиц. Мы встречаемся с ней в различных электронных приборах. Она образует верхние слои земной атмосферы и заполняет космическое пространство. Поведение плазмы сильно отличается от поведения обычного газа, состоящего из нейтральных частиц. В обычном газе главную роль играют прямые столкновения его частиц. Поведение такого газа описывается уравнением Больцмана. А. А. Власов первым показал, что в плазме подобные столкновения не играют практически никакой роли, так как электростатическое отталкивание не позволяет частицам подходить друг к другу вплотную. Поэтому в своем уравнении для плазмы Власов исключил классический член, учитывающий прямые соударения частиц, и ввел новый член, учитывающий коллективное влияние заряженных соседей на поведение отдельных частиц. Так было получено знаменитое «уравнение Власова», лежащее в основе теории плазмы.

Развитый А. А. Власовым метод исследования плазмы используется в работах по созданию управляемых термоядерных реакций, при изучении распространения радиоволн в атмосфере и космическом пространстве, а также в обширной новой области физики, так называемой магнитной гидродинамике, связанной, в частности, с методами прямого преобразования тепловой энергии в электрическую.

Член-корреспондент АН СССР Р. В. Хохлов и профессор С. А. Ахманов, работающие на физическом факультете Московского университета, удостоены премии *за исследования нелинейных когерентных взаимодействий в оптике.*

Обычная оптика имеет дело с такими процессами, в которых интенсивность света недостаточна для изменения физических свойств среды, через которую проходит свет. Появление мощных источников световых пучков — лазеров — позволило создать новую оптику, так называемую нелинейную. Она изучает многочисленные изменения физических характеристик среды под влиянием проходящего света. Основы этой области физики были заложены Р. В. Хохловым и С. А. Ахмановым. Одним из важнейших достижений этих ученых было создание лазеров с изменяющейся длиной волны излучения. Обычно у каждого лазера имеется своя строго фиксированная длина волны испускаемого излучения, свой цвет. Он определяется природой излучающего вещества. Набор возможных длин волн разных лазеров довольно беден; в нем нет многих излучений, нужных для физиков, химиков и биологов. Р. В. Хохлов и С. А. Ахманов разработали новые принципы, позволившие менять цвет излучения лазера в очень широком диапазоне длин волн. Например, по их методам можно лазер, работающий на невидимых инфракрасных волнах, заставить излучать ультрафиолетовые лучи. Такие лазеры находят множество важных практических применений. Они чрезвычайно расширили возможности изучения природы вещества.

Пятая Ленинская премия по физике присуждена сотруднику Государственного оптического института Ю. Н. Денисюку *за цикл работ «Голография с записью в трехмерной среде».*

Обычные фотографии дают нам плоское изображение запечатленных на них объектов. А в зеркале мы видим объемное изображение — предметы кажутся расположенными в глубине зеркала. Конечно, того, что мы видим позади зеркала, в действительности там нет. Изображение создают падающие на зеркало и отраженные от него световые волны. А нельзя ли сделать так, чтобы объемная картина, которую мы видим в зеркале, не исчезала и после удаления зеркала? Иными словами, нельзя ли зафиксировать объемное изображение непрозрачных предметов так, как это делает с плоским изображением обычная фотопленка? Эту задачу и решил Ю. Н. Денисюк (до него аналогичную задачу получения объемного изображения прозрачных тел решил английский физик Габор). Оказывается, что для этого надо зафиксировать в специальной прозрачной мелкозернистой эмульсии распределение световых волн вблизи рассматриваемого предмета (как говорят, получить голограмму предмета). Если проявить полученный «снимок», он будет совершенно непохож на изображаемый предмет. Однако, осветив проявленную пластинку белым светом, мы увидим вблизи нее великолепное объемное изображение сфотографированного таким образом предмета.

Если вогнутое зеркало сфотографировать обычным способом, получится кружок со световыми бликами. Если же получить голограмму такого зеркала, то созданное с ее помощью изображение будет настолько реальным, что сможет фокусировать падающий на него свет как настоящее вогнутое зеркало.

Новый способ получения трехмерных изображений, созданный Ю. Н. Денисюком, открывает возможности создания цветного объемного кино и телевидения, совершенствования радиолокации и гидролокации.

В области математики Ленинская премия присуждена коллективу ленинградских ученых — академику Ю. В. Линнику, члену-корреспонденту АН СССР Ю. В. Прохорову, профессорам И. А. Ибрагимову и Ю. А. Розанову *за цикл работ по предельным теоремам теории вероятностей*. В этих работах найдены важнейшие закономерности ряда сложных случайных процессов, играющих большую роль во многих областях науки и техники. Найденные закономерности чрезвычайно облегчают исследование случайных процессов, весьма распространенных в природе и обществе.

Центральный Комитет КПСС и Совет Министров СССР также постановили присудить Ленинские премии 1970 года в области науки и техники большой группе ученых, конструкторов и работников промышленности за следующие работы:

— комплекс научно-технических работ, проведенных с целью создания экспериментальной орбитальной станции и реализованных при запусках ракетно-космической системы «Союз»;

— создание автоматических межпланетных станций «Венера-4», «Венера-5», «Венера-6» и комплекс научных исследований по определению физических параметров и химического состава атмосферы планеты Венера;

— создание метеорологической космической системы, обеспечивающей с помощью искусственных спутников Земли «Метеор» получение и оперативную обработку глобальной метеорологической информации для нужд народного хозяйства.

В осуществление этих сложнейших научно-технических проблем большой вклад внесли советские математики и физики.

К статье «Невписываемые многогранники»

1. Покажем, что из каждой грани произвольного выпуклого многогранника можно пройти в любую другую, двигаясь от смежной грани в смежную. Возьмем для этого две произвольные грани и выберем в них по точке, не лежащей на границе. Соединим выбранные точки отрезком. Этот отрезок не пересекает плоскостей граней многогранника, ибо многогранник выпуклый. Проведем через этот отрезок плоскость, не содержащую вершин многогранника: это возможно, так как у многогранника лишь конечное число вершин. Проведенная плоскость высекает на поверхности многогранника две ломаные. Они не проходят через вершины многогранника, т. е., двигаясь по ним, мы будем переходить от одной смежной грани к другой и пройдем из первой грани во вторую. Теперь фиксируем некоторую грань многогранника, скажем Γ_1, и две точки O_1 и O_2, удаленные на r_k от всех ее вершин. Предположим для простоты, что во всех вершинах многогранника сходятся по три грани; в общем случае суть дела остается неизменной. Вершины всякой смежной с Γ_1 грани удалены на r_k либо от O_1 либо от O_2, но не от обеих сразу, ибо все точки, равноудаленные от O_1 и O_2, лежат в плоскости грани Γ_1. Предположим, что найдутся такие грани Γ_2 и Γ_3, что вершины первой лежат на расстоянии r_k от O_1, а вершины второй — от O_2. Ясно, что тогда найдутся две такие грани, сходящиеся в одной вершине, а значит, в силу дополнительного предположения, смежные. Тогда второй конец их общего ребра равноудален от O_2 и O_1, что противоречит выпуклости многогранника.

Итак, вершины всех смежных с Γ_1 граней равноудалены от одной точки, например, O_1. Это верно и для вершин граней, смежных с Γ_2 или Γ_3 и т. д., т. е. для всех вершин многогранника. Обратное утверждение очевидно.

2. Покажем, что если все двугранные углы построенного многогранника меньше π, то он выпуклый. Возьмем плоскость некоторой его грани. Все смежные с ней грани лежат по одну сторону от этой плоскости, значит, по ту же сторону лежит вся треугольная пирамида, содержащая продолженную грань, и три другие пирамиды, имеющие с первой по общему ребру. Следовательно, по ту же сторону лежат две грани октаэдра, содержащие одно из ребер первой грани, а значит, и сам октаэдр и остальные пирамиды. Чтобы завершить доказательство, достаточно вычислить двугранный угол октаэдра.

3. Действуя, как при доказательстве теоремы Штейница, легко заметить, что сумма в первой части строго больше 0 (а не больше либо равна как в теореме), зато в левой части сумма меньше либо равна 0 (а не строго меньше 0).

4. В примере, построенном к теореме Штейница, надо подклеить лишь часть пирамид.

5. Доказательство в точности совпадает с доказательством того, что если в каждой вершине многогранника сходится k граней, то он заведомо не удовлетворяет теореме Штейница.

6. Покажем, что всякая замкнутая ломаная, составленная из ребер многогранника — четнозвенная. Ясно, что это достаточно доказать для ломаных без самопересечения.

Рассмотрим некоторую ломаную, не содержащую самопересечений и разрежем многогранник по этой ломаной. Пусть в одной части K граней, а в другой L и $L \leq K$. Целое число L назовем обхватом ломаной. Если обхват равен 1, то доказываемое утверждение следует из условия задачи. Применим индукцию, пусть для ломаных обхвата меньше L задача решена. Выберем грань Γ, ребро которой принадлежит ломаной и которая лежит в той части многогранника, где граней меньше. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_k$ — ребра ломаной, являющиеся ребрами грани Γ и $P_{k+1}, \ldots, P_s$ — остальные ребра грани Γ. Перейдем к новой ломаной, которая получается из исходной заменой ребер $P_1, \ldots, P_k$ на $P_{k+1}, \ldots, P_s$. Возможно, новая ломаная с самопересечениями и даже состоит из нескольких несвязанных кусков, но обхват каждой ее несамопересекающейся части заведомо меньше L, значит, новая ломаная четнозвенная. Предположим, что в ней $2N$ звеньев. У выбранной в начале доказательства грани $2Q = s$ сторон, тогда число звеньев исходной ломаной равно $2N+2Q-2K$ — четное число (рис. 1).

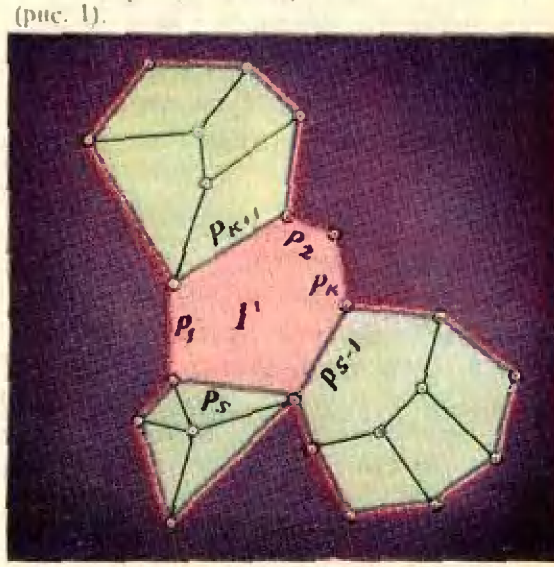


Рис. 1. Красные ребра относятся к исходной ломаной, зеленые — к вновь построенной.

8. Мы изложим решение задачи 8, из которой задача 7 легко следует. Рассмотрим k-гранный угол, вершина которого не лежит на сфере. Проведем луч l, целиком содержащийся внутри (но не на границе) угла. Пусть вначале вершина лежит вне шара. Каждая окружность разбивает сферу на две «шляпки». Рассмотрим окружности — пересечения граней угла со сферой и выберем для каждой из них ту шляпку, которая не содержит точек A и B — точек пересечения луча l со сферой. Рассмотрим стереографическую проекцию на плоскость с центром проекции в точке A. Фиксированные k шляпок не пересекаются в одной точке, значит, при проекции возникнет такая картина, как на рисунке 2.

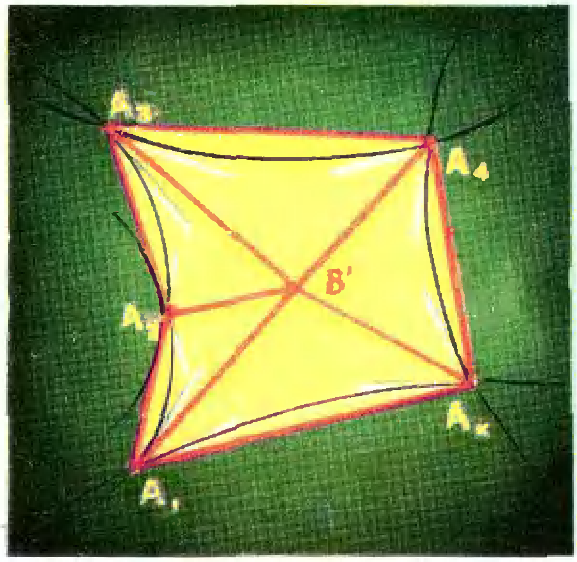


Рис. 2.

B' — образ точки B при проекции. Сумма углов многоугольника $A_1, \ldots, A_k$ строго больше суммы относительных углов. Мы не знаем, является ли он выпуклым, но ясно, что прямые отрезки, соединяющие точку B' с точками A_i, ему целиком принадлежат. Это следует из определения луча l. В силу этого $A_1 + \ldots + A_k = \pi(k-2)$ и сумма относительных углов меньше $\pi(k-2)$.

Если вершина лежит внутри шара, то совершенно аналогично доказываем, что сумма относительных углов больше $\pi\,(k-2)$.

Перейдем непосредственно к решению задачи. Пусть B_1 — вершина, положение которой не определено. Разобьем вершины, как это описано в задаче 6, на черные и белые. Пусть B_1 — белая. Нетрудно видеть, что если вершина k-гранного угла лежит на сфере и все его ребра сферу пересекают, кроме одного ребра, касательного к сфере, то сумма относительных углов равна $\pi(k-2)$.

Теперь перейдем к внешним относительным углам и вычислим их суммы при каждой вершине. При всех вершинах, кроме B_1, эти суммы заведомо равны 2π. Если B_1 не лежит на сфере, то сумма при ней не равна 2π. Сложим равенства при белых вершинах, вычтем из них равенства при черных и в итоге получим, что $0 \neq 0$. Таким образом, B_1 лежит на сфере.

9. Предположим противное. Соединим точку касания каждой грани с вершинами грани отрезками и рассмотрим угол между двумя отрезками, который опирается на некоторое ребро многогранника (рис. 3). Величина этого угла не зависит от выбора одной из граней, содержащих ребро. $\Delta O'B_1B_2 = \Delta O''B_1B_2$ (по трем сторонам), значит, $\angle B_1O'B_2 = \angle B_1O''B_2$.

Припишем каждому ребру величину угла, на него опирающегося. Обозначим угол, приписанный ребру P_k, через β_k. Сумма углов, приписанных ребрам каждой грани, равна 2π.

Дальнейшее доказательство получается из

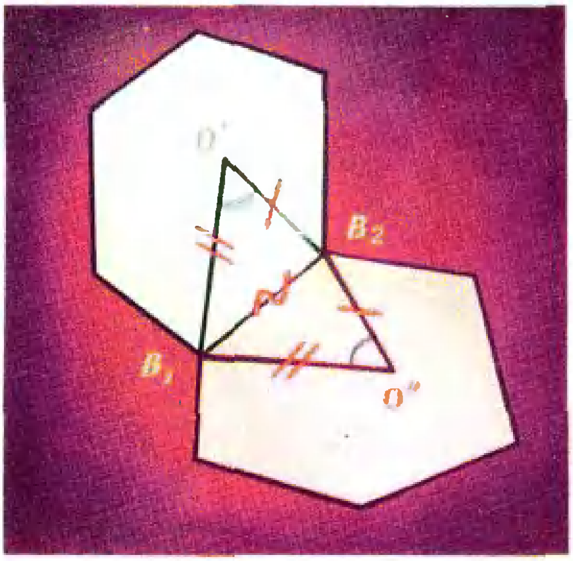


Рис. 3.

доказательства теоремы Штейница заменой слова вершина на слово грань.

1. $\frac{a}{b} = [1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \ldots]$.

2. $[1;\ 1,\ 1,\ \ldots] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$;

$a_{10} = R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3. $[0;\ 1,\ 1,\ \ldots] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

$a_{10} = R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

4. Если $a_0 \neq 0$, то сдвинуть всю «гребенку» на один шаг вправо, а на место целых вписать нуль. Если $a_0 = 0$, то сдвинуть всю гребенку на один шаг влево. Например:

$\alpha = [3;\ 1,\ 2,\ 5]$, $\frac{1}{\alpha} = [0;\ 3,\ 1,\ 2,\ 5]$,

$\beta = [0;\ 2,\ 2,\ \ldots]$, $\frac{1}{\beta} = [2;\ 2,\ 2,\ \ldots]$.

5. Да, с той лишь разницей, что знак $\leqslant$ будет на один шаг правее, т. е.

$$p_0 < p_1 \leqslant p_2 < p_3 < \ldots$$

К статье «Алиса в Зазеркалье»

1. 4 *фут*.
2. 2 *фут*; 6 *дюйм*.
3. 60 *фут*; 3 *дюйм*; 3 *дюйм*; 4.
4. 2,6 *дюйм*; 6 *дюйм*.
5. 0,25; $^1/_4=(^1/_2)^2$.
6. Усеченная пирамида размером около $^1/_2\times{}^1/_2\times{}^1/_4$ *дюйм*.
7. 3 *дюйм* в ширину; $^3/_8$ *дюйм* толщиной.
8. Она будет слишком худой.
11. а) обычным; б) циферблат овальный; при вращении стрелки удлиняются и сокращаются.
12. То же, что и с часами в упражнении 11, б.
13. В направлении 63°50′ на северо-восток.
14. Нет.

К статье «Об одном индуктивном методе доказательства неравенств»

2. а) $f(x)=x^p$; для доказательства неравенства при $n=2$ удобно ввести обозначения $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ и $d=\frac{x_2-x_1}{2}$ и заметить, что если $(x+d)^p=C_p^0x^p+C_p^1x^{p-1}d+C_p^2x^{p-2}d^2+C_p^3x^{p-3}d^3+\ldots+C_p^p d^p$, где $C_p^0, C_p^1, C_p^2, \ldots$ — коэффициенты многочлена $(x+d)^p$, то $(x-d)^p=C_p^0x^p-C_p^1x^{p-1}d+C_p^2x^{p-2}d^2-C_p^3x^{p-3}d^3+\ldots+(-1)^pC_p^p$

в) $f(\alpha)=\lg\sin\alpha$; $\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

д) $f(x)=\lg(1+10^x)$, $-\infty<x<\infty$;

в полученном неравенстве положить $x_k=\lg\frac{b_k}{a_k}$.

К задаче «Бесконечное произведение»

Сначала убедимся, что получается геометрическая прогрессия:

$$(1+x+x^2+\ldots+x^9)\times$$
$$\times(1+x^{10}+x^{20}+\ldots+x^{90})\times$$
$$\times(1+x^{100}+x^{200}+\ldots+x^{900})\ldots=$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$$

Действительно, $x^{\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0}}$ (где $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0}=a_0+10a_1+\ldots+10^n a_n$ — десятичная запись любого неотрицательного целого числа) обязательно должно появиться в процессе перемножения скобок и притом один раз (a_0 получаем из первой скобки, a_1 — из второй и т. д.).

Отсюда искомое произведение равно

$$1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}.$$

К задаче «Откуда взялись равенства?»

Все равенства основаны на формуле

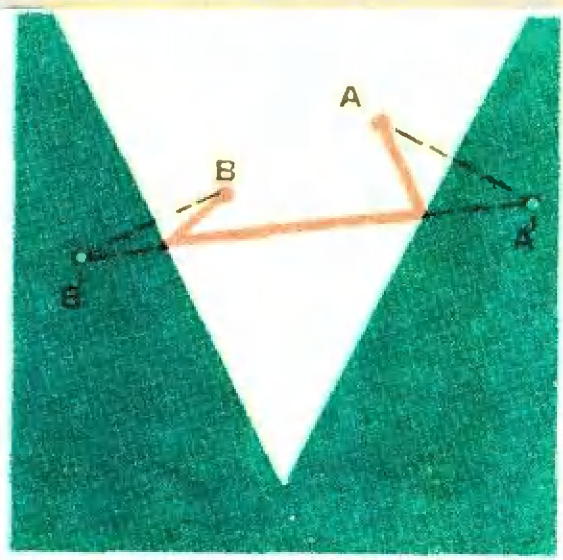
$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}.$$

Действительно:

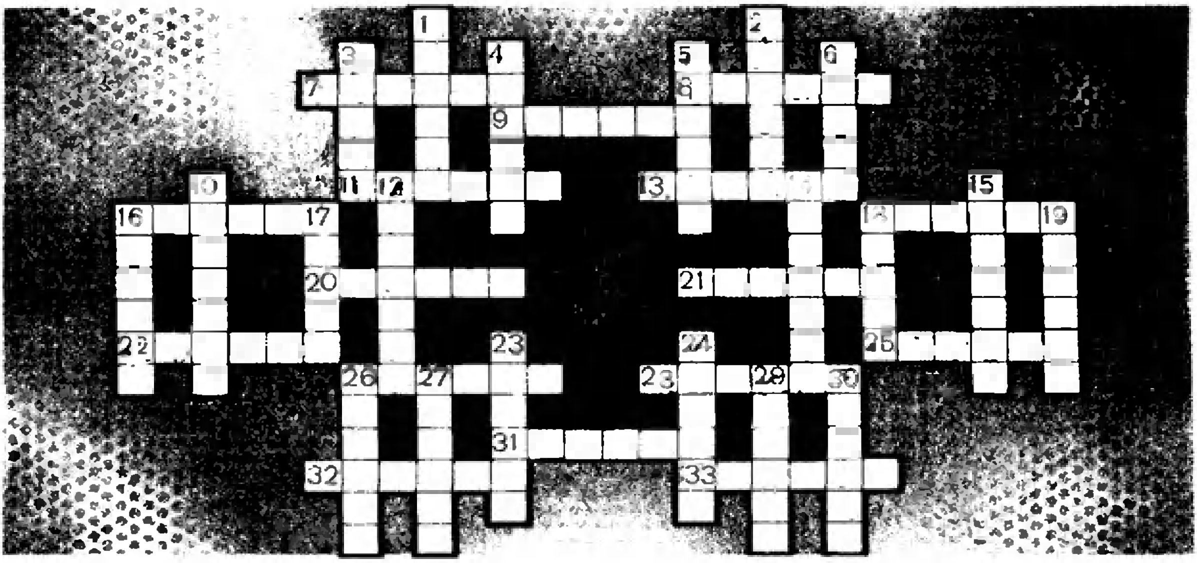
$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}\times$$
$$\times\frac{a^2-ab+b^2}{a^2-a(a-b)+(a-b)^2}=$$
$$=\frac{a+b}{a+(a-b)}\times$$
$$\times\frac{a^2-ab+b^2}{a^2-a^2+ab+a^2-2ab+b^2}=$$
$$=\frac{a+b}{a+(a-b)}.$$

К задаче об Аленушке и Иванушке

Отразим точку A относительно берега молочной реки, получим точку A'. Отразим точку B относительно берега кисельной реки, получим точку B'. Соединим точки A' и B' отрезком прямой. Остальное ясно из рисунка.



Кроссворд



По вертикали:

1. Направление по ортодромии.
2. Понятие из механики.
3. Препятствие, отражающее лучи.
4. Иллюстрация к математическому рассуждению.
5. Сторона света.
6. Препятствие.

10. Предпосылка.
12. Специалист в одной из прикладных областей физики.
14. Координата.
15. Явление, служащее основанием другого явления.
16. Способ.
17. Аргумент.
18. Условия работы.
19. Приспособление для визирования.
23. Число, обращающее уравнение в равенство.
24. Механизм.
26. Метод исследования.
27. Метод исследования.
29. Число в древнеславянской нумерации, о котором говорилось «и боле сего несть человеческому уму разумети».
30. Часть таблицы.

По горизонтали:

7. Действительное число.
8. Путь движения небесного тела.
9. Номер.
11. Явление, сопровождающее передачу тепла.
13. Единица у древних математиков.
16. Мера интенсивности потока жидкости.
18. Место, занимаемое цифрой в записи натурального числа.
20. Одна из характеристик треугольника.
21. Угловое движение спутника или самолета.
22. Механизм, передающий вращательное движение.
25. Часть телефонного аппарата.
26. Резкое изменение поведения функции.
28. Система из скрепленных стержней.
31. Один из первых известных нам геометров.
32. Образец.
33. Советский медик, занимающийся вопросами кибернетики и ее популяризации.

Ответ к задаче «Три магических квадрата», опубликованной в № 7 (см. рисунок).

71	1	51
21	41	61
31	81	11

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

квант 8